



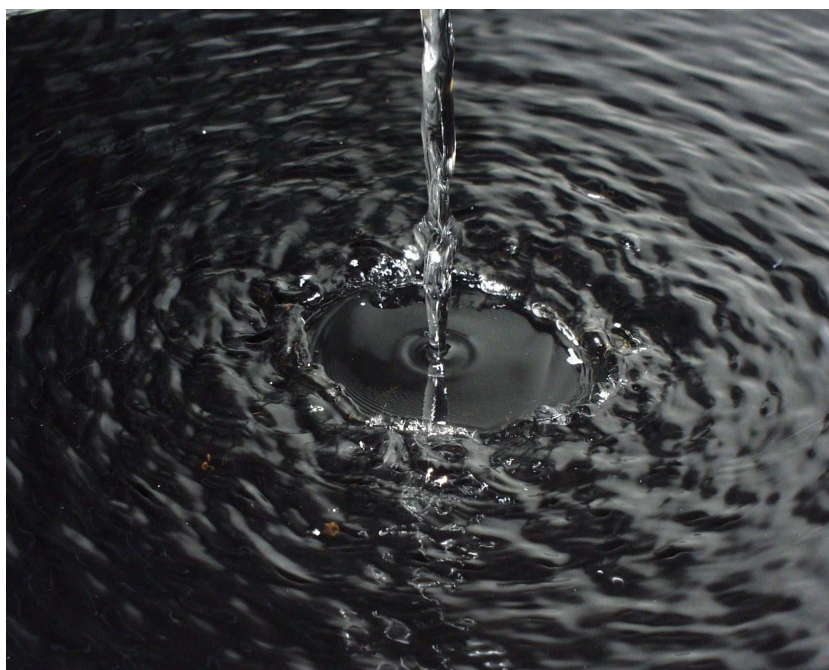
MASTER 1 DE MÉCANIQUE

TD 2019-2020

ONDES ET ACOUSTIQUE DANS LES FLUIDES

Marc Rabaud

Laboratoire FAST, bât. Pascal (530), 91405 Orsay cedex
rabaud@fast.u-psud.fr



Ressaut hydraulique au fond d'un évier.

Table des matières

1	TD 1 : Ondes acoustiques	5
1.1	Résonateur de Helmholtz	5
1.2	Ordre de grandeur en acoustique	6
1.3	Atténuation des ondes acoustiques dans un fluide visqueux	6
2	TD 2 : Impédance acoustique	9
2.1	Transmission du son à travers un mur	9
2.2	Temps de réverbération dans une église	10
2.3	Propagation des ondes sonores dans un tuyau divergent	10
2.4	Effet Doppler	12
3	TD 3 : Ondes de surface	13
3.1	Ondes gravito-capillaires en eau profonde	13
3.2	Dérive de Stokes	14
3.3	Houles Atlantique	15
3.4	Sillage d'un bateau	15
4	TD 4 : Ondes en eau peu profonde	17
4.1	Solitons	17
4.2	"Ondes de bord"	19
5	TD 5 : Ondes internes de gravité	21
5.1	Ondes internes dans un liquide stratifié	21
5.1.1	Fréquence de Brunt-Väisälä	21
5.1.2	Relation de dispersion des ondes internes	21
5.1.3	Structure des ondes internes	22
5.1.4	Ondes océanes	22
6	TD n°6 : Ondes dans les fluides en rotation	23
6.1	Ondes dans les fluides en rotation	23
6.1.1	Etude qualitative	23
6.1.2	Ondes inertielles dans un fluide en rotation (d'après G. K. Batchelor p. 559) .	23
6.1.3	Ondes de Rossby (d'après D. J. Tritton p. 232)	24
6.2	Ondes de Kelvin dans la Manche	25

7	Autres exercices	33
7.1	Propagation du son	33
7.2	Ondes acoustiques	34
7.3	Equation d'onde dans une colonne cylindrique d'air	35
7.4	Lévitiation acoustique	35
7.4.1	Énergie acoustique	36
7.4.2	Impédance acoustique	37
7.4.3	Lévitiation acoustique	37
7.5	Champ de vitesse sous une onde plane à la surface d'un liquide	38
7.6	Oscillations dans un fluide visqueux	39
7.7	Ondes capillaires dans un fluide visqueux	40
7.8	Ondes sous une plaque mince flottant sur un liquide	42
7.8.1	Description des ondes dans le liquide	42
7.8.2	Description du mouvement de la plaque	43
7.9	Dérive de Stokes - Version 2	43
7.10	"Shoaling" de la houle sur une remontée lente des fonds	44
7.10.1	Cas des ondes en eau profonde	44
7.10.2	Cas des ondes en eau peu profonde	44
7.10.3	Application aux tsunamis	45

Chapitre 1

TD 1 : Ondes acoustiques

1.1 Résonateur de Helmholtz

Un résonateur de Helmholtz ressemble, par exemple à une bouteille en verre d'Orangina. Lorsque l'on souffle tangentiellement à l'embouchure on peut entendre un son grave régulier. Nous allons essayer de comprendre et de calculer la fréquence de ce phénomène.

On modélise le résonateur par une cavité cylindrique de volume V (la bouteille) ouverte vers l'extérieur par un tube de petite section A et de longueur L (le col). On supposera que les longueurs d'ondes acoustiques sont grandes devant toutes les échelles géométriques.

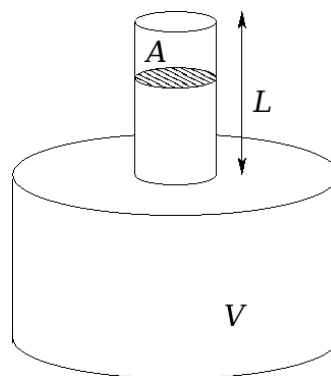


FIGURE 1.1 – Schéma simplifié d'un résonateur de Helmholtz.

1. On suppose que les perturbations à l'entrée génèrent un petit déplacement en bloc de l'air dans le col d'amplitude Δx , qui induit lui une compression adiabatique de l'air dans la bouteille. Exprimer la variation de pression dans la bouteille en fonction de Δx .
2. En déduire la force ΔF appliquée à l'air dans le col par la surpression dans la bouteille. En écrivant le principe fondamental de la dynamique pour la masse d'air contenue dans le col établir une équation d'oscillation pour l'air dans le col.
3. En déduire la fréquence propre de résonance f_0 de la bouteille. On pourra faire apparaître la célérité du son. A.N. pour $V = 33 \text{ cl} = 330 \text{ cm}^3$, $A = 1 \text{ cm}^2$ et $L = 3 \text{ cm}$. Calculer la longueur d'onde des ondes sonores correspondantes. Conclusion ? S'agit-il d'ondes stationnaires dans la bouteille ? Existe-t-il un analogue mécanique de ce phénomène ?

4. Le même phénomène permet-il d'expliquer le vrombissement basse fréquence dans l'habitacle d'une voiture ayant une vitre légèrement entre-ouverte ?

1.2 Ordre de grandeur en acoustique

Dans cet exercice, on veut établir les principales caractéristiques d'une onde acoustique (vitesse, intensité, etc) par analyse dimensionnelle. On s'intéressera au cas d'ondes sonores se propageant dans l'air, l'eau, ou le cuivre. On donne la masse volumique de l'air $\rho_{air} \simeq 1,30 \text{ kg.m}^{-3}$, de l'eau $\rho_{eau} \simeq 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, et du cuivre $\rho_{Cu} \simeq 9 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

1. En partant de la pression de l'air $p_0 \simeq 10^5 \text{ Pa}$, et par analyse dimensionnelle, construire une grandeur c qui a les dimensions d'une vitesse, et la calculer dans le cas de l'air.
2. Evaluer l'écart relatif entre la valeur trouvée et celle mesurée $c_{air} = 340 \text{ m/s}$. Comment expliquer cette différence ? Et pour un liquide ou un solide ?
3. En décrivant qualitativement le mécanisme de propagation du son dans un milieu matériel, montrer que la pression du fluide n'est pas la grandeur pertinente pour la construction d'une vitesse.
4. On définit alors le module d'élasticité volumique d'un milieu par $K = \rho(\partial p / \partial \rho)$. Quelle est la dimension de K ? Comment est-il relié à la compressibilité isentropique ? Par analyse dimensionnelle, en déduire une nouvelle expression de c faisant intervenir les bonnes grandeurs caractéristiques.
5. On rappelle que dans le cas d'un gaz parfait $K = \gamma p$, où $\gamma \simeq 1,4$ est l'indice d'adiabaticité pour un gaz diatomique. En déduire alors la vitesse du son dans l'air.
6. On donne le module d'élasticité volumique de l'eau $K_{eau} \simeq 2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ et du cuivre $K_{Cu} \simeq 1,2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$. En déduire les vitesses de propagation du son dans ces deux milieux. Comparer les trois vitesses obtenues et conclure.
7. La puissance vocale dans une conversation normale est de l'ordre de 10^{-5} W/m^2 . Quelle surpression cela représente-t-il si on considère des ondes planes ? Comparer à la pression atmosphérique. L'air peut-il encore être considéré comme un fluide incompressible ?
8. Quelle variation d'intensité sonore, en dB, représente l'ajout d'une seconde trompette à une première trompette dans une fanfare ?
9. Une onde se propage dans l'air, avec une amplitude de surpression $\delta p \simeq 65 \text{ Pa}$. En déduire l'ordre de grandeur de l'intensité acoustique I de l'onde en W/m^2 , puis l'exprimer en dB (on prendra pour intensité de référence $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$). Rappeler la signification physique du décibel.

1.3 Atténuation des ondes acoustiques dans un fluide visqueux

On considère une masse fluide au repos par rapport à un référentiel galiléen. Soit ρ_0 et p_0 respectivement la masse volumique et la pression qui sont donc constantes dans ce fluide. La situation dynamique envisagée est celle d'une onde (acoustique) de pression p' se propageant dans cette masse fluide suite à une perturbation de très faible amplitude. On notera $\delta \rho$ et $\vec{v}$ les perturbations associées de masse volumique et de vitesse respectivement. Pour analyser cette situation, on part des équations de bilan suivantes :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \vec{\nabla} [\text{div}(\vec{v})] \quad (1.1)$$

et

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.2)$$

où η est la viscosité dynamique et $\rho(x, y, z, t) = \rho_0 + \delta\rho(x, y, z, t)$. On admettra pour la suite que la seconde viscosité ζ est négligeable (au pire en tenir compte reviendrait à renormaliser la viscosité dynamique). On admettra que le fluide vérifie dans ces conditions l'équation d'état approchée suivante, $\rho = \rho_0(1 + \chi(p - p_0))$, où χ est la compressibilité adiabatique. On utilisera la relation $\chi\rho_0 = c^{-2}$, où c est la vitesse de phase du son dans ce fluide.

1. En considérant que $\delta\rho \ll \rho_0$, écrire ces équations de bilan au premier ordre en $\delta\rho$ et $\vec{v}$.
2. Ecrire la relation entre $\delta\rho$ et $p' = p - p_0$.
3. En déduire la nouvelle version des deux équations de bilan qui couplent l'évolution temporelle de p' et $\rho_0 \vec{v}$. On notera $\nu = \eta/\rho_0$ la viscosité cinématique.
4. En appliquant la divergence sur l'équation de bilan de la quantité de mouvement, établir l'équation qui gouverne l'évolution spatio-temporelle de p' . On écrira cette équation sous la forme

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + a \nabla^2 + b \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \right) p' = 0 \quad (1.3)$$

où a et b sont des coefficients que l'on précisera. Vérifier qu'à viscosité nulle on retrouve bien la relation de dispersion usuelle.

La solution d'onde de cette équation est cherchée sous la forme d'une onde plane progressive monochromatique (OPPM) :

$$p' = p_1 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (1.4)$$

où $\vec{k}$ un vecteur d'onde réel et $\omega = \omega_r + i\omega_i$ une pulsation, à priori complexe.

5. Quelle est la signification physique d'une telle solution ?
6. Ecrire la relation de dispersion $\omega(k)$ que vérifient ces ondes.
7. En déduire les deux relations qui couplent $\omega_r(k)$ et $\omega_i(k)$.
8. On veut la solution qui correspond à $\omega_r(k) \neq 0$. Comment s'exprime alors $\omega_i(k)$? Que signifie ce résultat pour le comportement des ondes correspondantes ?
9. En déduire $\omega_r^2(k)$.
10. En déduire la vitesse de phase de ces ondes, $v_\phi = \omega_r/k$, sous la forme $v_\phi = c\sqrt{1 - f(k)}$, avec $f(k)$ que l'on précisera. Que signifie la présence de $f(k)$?
11. On donne $c = 340$ m/s dans l'air, et $\nu = 15 \times 10^{-6}$ m²/s la viscosité cinématique de l'air. Pour quelle valeur de k , et donc de λ , la longueur d'onde correspondante, la vitesse de phase des ondes s'annule-t-elle dans l'air ?

Chapitre 2

TD 2 : Impédance acoustique

2.1 Transmission du son à travers un mur

On s'intéresse à l'atténuation des sons par une surface rigide mobile (mur). La surface est initialement immobile mais peut être mise en mouvement (vibrations) par l'onde de pression. On se placera dans le cas où le mur n'est ni élastique ni absorbant, et son épaisseur très petite devant la longueur d'onde du son. Sa masse surfacique est donnée par σ en kg/m^2 . L'onde de pression incidente $p_i(x, t) = A \exp i(k_i x - \omega t)$ arrive sur le mur sous incidence normale; une partie de l'onde se réfléchit avec l'amplitude (complexe) $p_r(x, t) = r A \exp i(-k_r x - \omega t)$, le reste est transmis sous la forme $p_t(x, t) = t A \exp i(k_t x - \omega t)$. Soit $v(t)$ la vitesse de déplacement du mur et $p(x = 0_-, t) - p(x = 0_+, t)$ la discontinuité de pression entre les faces entrantes et sortantes du mur (le mur se trouve en $x = 0$).

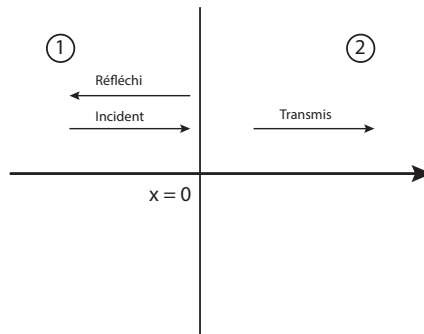


FIGURE 2.1 – Schéma d'un mur plan en $x = 0$ séparant deux volumes d'air à la même température, pour une onde incidente se propageant dans le milieu 1 dans le sens des x croissants.

1. Ecrire l'équation fondamentale de la dynamique pour le mur.
2. La relation entre la vitesse du fluide $\vec{v}(x, t)$ et la surpression locale $p(x, t)$ pour des ondes de pression est simplement donnée par :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p. \quad (2.1)$$

Rappeler l'origine physique de cette relation, et en déduire l'expression des vitesses de déplacement de l'air au passage des ondes incidente $v_i(x, t)$, réfléchie $v_r(x, t)$ et transmise $v_t(x, t)$ pour des OPPM.

3. En remarquant que la composante normale de la vitesse de déplacement de part et d'autre du mur (en $x = 0_+$ et $x = 0_-$) doit être continue, et en utilisant l'équation de la dynamique du mur, calculer les coefficients de réflexion r et de transmission t .
4. Que se passe-t-il dans la limite où la masse M du mur est très grande devant m , celle d'une tranche d'air d'épaisseur λ ? Quelles sont les pulsations ω les mieux transmises? Les mieux réfléchies?
5. Application numérique. On considère un mur de béton de masse surfacique $\sigma = 250 \text{ kg/m}^2$, et un paquet d'onde centré sur $\lambda \sim 1 \text{ m}$ et d'amplitude $A = 10 \text{ Pa}$. On rappelle la vitesse du son dans l'air $c = 340 \text{ m/s}$, et la densité de l'air dans les conditions de l'expérience $\rho_0 = 1,2 \text{ kg/m}^3$. Quelle est l'amplitude de la surpression? Quelle est la fréquence de coupure? Calculer l'intensité de l'onde transmise (en dB, avec pour intensité de référence $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$).
6. Pour atténuer le son, est-il intéressant d'avoir des doubles vitrages (espace d'air entre deux surfaces de verre) ou seule l'épaisseur totale de verre est-elle importante?

2.2 Temps de réverbération dans une église

On définit le temps de réverbération RT60 dans une salle, comme le temps nécessaire pour puissance sonore diminue de 60 dB par rapport à son niveau initial.

En supposant que l'atténuation est uniquement dû à la dissipation visqueuse dans l'air, estimer RT60 pour un son à 1000 Hz et pour un son à 100 Hz.. En introduisant un coefficient de réflexion de l'énergie $R = 0,1$ sur les parois de la pièce, estimer le temps de réverbération en fonction des dimensions L de la pièce supposée cubique si l'atténuation est dominée par les murs..

Pour aller plus loin on peut utiliser les relations de Sabine, ou de Eyring (1930).

2.3 Propagation des ondes sonores dans un tuyau divergent

On considère un gaz contenu dans un tuyau de symétrie axiale et de section lentement variable $S(x)$. Le gaz a une masse volumique locale ρ , une pression p et une vitesse locale $\vec{u}$. On supposera que ces trois quantités ne dépendent que de x et du temps, et que la vitesse est principalement dans la direction Ox (voir figure 2.2).

1. Expliquer pourquoi les deux hypothèses précédentes sont fausses près de la paroi du tuyau.
2. Etablir l'équation de continuité exprimant la conservation de la masse sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial (S \rho u)}{\partial x} = 0. \quad (2.2)$$

Pour cela on peut considérer une couche d'air entre x et $x + dx$ et exprimer la variation de sa masse pendant dt .

3. Conformément à la remarque de la question 1, montrer que l'équation 2.2 n'est effectivement compatible avec l'équation de conservation locale de la masse (équation de continuité) que si

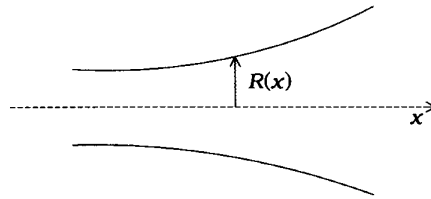


FIGURE 2.2 – Coupe d'un tuyau divergeant.

l'on tient compte d'une petite contribution transverse du champ de vitesse.

Dynamique du gaz

4. Montrer que si l'on néglige la force de gravitation, l'équation d'Euler se réduit à :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (2.3)$$

5. On suppose que le gaz est homogène et stationnaire à l'équilibre et que le mouvement décrit par u correspond à une petite perturbation. On posera $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ et $p = p_0 + p'$. Ecrire l'approximation linéarisée des équations de continuité et d'Euler. On suppose que la compression suit une loi de type adiabatique, à savoir que $p \propto \rho^\gamma$. Ecrire alors l'équation d'Euler en fonction de u et $\delta\rho$.
6. Montrer que la perturbation de densité évolue selon l'équation :

$$\frac{\partial^2(\delta\rho)}{\partial t^2} - \frac{c_s^2}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left[S \frac{\partial(\delta\rho)}{\partial x} \right] = 0. \quad (2.4)$$

où c_s désigne la vitesse du son ($c_s^2 = \gamma p_0 / \rho_0$).

Montrer que la vitesse est gouvernée elle par l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{S} \frac{\partial(Su)}{\partial x} \right] = 0. \quad (2.5)$$

Ondes dans un pavillon exponentiel

7. On considère un pavillon tel que $S(x) = S_0 \exp(\alpha x)$. Une vibration de pulsation ω est imposée à l'entrée du pavillon et l'on cherche donc les solutions de l'équation de la vitesse sous la forme complexe : $\tilde{u}(x, t) = \phi(x) \exp(-i\omega t)$.

Montrer que la fonction complexe ϕ est solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$\phi'' + \alpha\phi' + \frac{\omega^2}{c_s^2}\phi = 0.$$

8. Quelles sont les solutions du problème dans le cas d'un tuyau cylindrique ($\alpha = 0$) ? On note $k_c = \omega/c_s$. Que représente k_c ?

9. Dans le cas d'un tuyau exponentiel ($\alpha \neq 0$), discuter de la nature des solutions et montrer notamment que les ondes sonores ne se propagent que pour $\omega > \alpha c_s/2$.
10. Montrer que les ondes ont une amplitude décroissant exponentiellement avec x et calculer le nouveau nombre d'onde k en fonction de k_c et α .
11. Donner l'expression générale de $u(x, t)$ et l'expression de l'onde progressive.
12. Ecrire la relation de dispersion sous la forme d'une équation reliant ω^2 et k^2 .
13. Quelle est l'expression de la vitesse de phase v_φ en fonction de c_s , ω et α ?
14. Calculer la vitesse de groupe $v_g = d\omega/dk$ et vérifier que $v_\varphi v_g = c_s^2$.
15. Calculer la densité d'énergie cinétique moyenne : $E_c = \frac{1}{2}\rho_0 \langle u^2 \rangle$. Comment varie alors SE_c ? Commenter.
16. De nombreux instrument à vent par exemple possèdent un pavillon de sortie. Quel est finalement l'intérêt d'utiliser un tel pavillon divergeant?

2.4 Effet Doppler

Une voiture se dirige vers un piéton immobile avec une vitesse $V = 50$ km/h. Calculer le décalage relatif en fréquence. Faut-il être un bon musicien pour entendre la différence avec la fréquence émise lorsque la voiture aura dépassé le piéton?

Chapitre 3

TD 3 : Ondes de surface

3.1 Ondes gravito-capillaires en eau profonde

On s'intéresse à la propagation des ondes interfaciales entre deux fluides superposés. Pour simplifier on considérera le cas d'un liquide de viscosité négligeable (de l'eau par exemple) et d'un gaz (de l'air) de viscosité et de densité négligeables comparées à celle du liquide.

L'axe z est dirigé vers le haut, la surface de l'eau au repos définissant l'origine $z = 0$. On se restreint à des ondes planes se propageant selon les $x > 0$, invariantes selon y , et l'on suppose que l'interface prend la forme $\zeta(x, t) = \zeta_0 e^{i(kx - \omega t)}$, où $k > 0$ est le nombre d'onde et ζ_0 l'amplitude de l'onde. La profondeur d'eau, h_0 , est supposée très grande devant les longueurs d'onde considérées, et n'intervient donc pas dans le problème. On supposera en outre que l'amplitude ζ_0 reste faible comparée à la longueur d'onde (approximation linéaire).

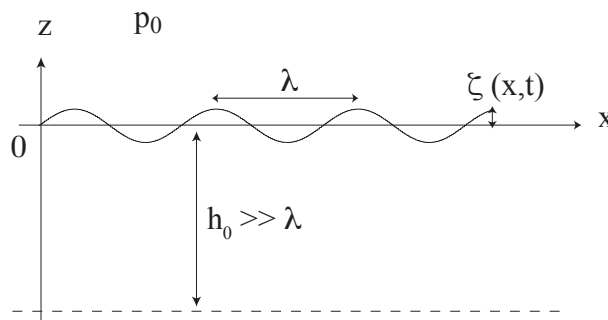


FIGURE 3.1 – Onde de surface en eau très profonde.

1. La propagation de cette onde est associée à un mouvement incompressible d'un fluide parfait, que l'on supposera de plus irrotationnel. En déduire que le champ de vitesse dérive d'un potentiel $\Phi(x, z, t)$, et donner l'équation que doit satisfaire ce potentiel.
2. En recherchant des solutions sous forme complexe $\Phi = f(z) \exp i(kx - \omega t)$, montrer que, compte tenu des conditions aux limites sur la vitesse en $z \rightarrow -\infty$, la fonction $f(z)$ s'écrit $f(z) = \Phi_0 \exp(kz)$.
3. Le fluide étant parfait, le champ de vitesse doit de plus satisfaire l'équation d'Euler. Montrer que le terme non-linéaire est négligeable devant le terme instationnaire si $\zeta_0 k \ll 1$.

4. Montrer que finalement la pression est liée au potentiel par la relation :

$$p = cste - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho g z,$$

où ρ est la masse volumique du liquide.

5. En écrivant la condition aux limites cinématique (la vitesse transverse de l'interface est égale à la vitesse du liquide), en déduire l'expression de Φ_0 . Tracer l'allure du champ de vitesse, ainsi que de la trajectoire des particules fluides.
6. On écrit maintenant la condition aux limites dynamique : La différence de pression de part et d'autre de l'interface est proportionnelle à la courbure de l'interface et à la tension de surface γ entre l'air et l'eau, $p - p_0 = -\gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$. En déduire la relation de dispersion des ondes de surface :

$$\omega^2 = gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3.$$

7. Tracer l'allure de la vitesse de phase c en fonction de k , et montrer qu'il existe deux limites simples selon que k est petit ou grand devant un nombre d'onde critique k_c que l'on déterminera (A.N. $\gamma = 0,072$ N/m pour l'interface eau-air). Quel régime correspond aux ondes de gravité et lequel correspond aux ondes capillaires ? Quelle est la vitesse minimum à laquelle une onde peut se propager à la surface d'un liquide immobile ? Que se passe-t-il s'il existe un courant homogène dans l'eau ?
8. Exprimer la vitesse de groupe $c_g = \partial \omega / \partial k$ dans les deux régimes $k \ll k_c$ et $k \gg k_c$. Que vaut le rapport c/c_g dans ces deux régimes ? Représentez schématiquement la propagation d'un paquet d'onde dans ces deux régimes.

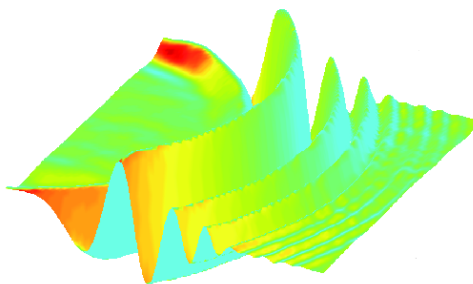


FIGURE 3.2 – Ronds dans l'eau.

3.2 Dérive de Stokes

On s'intéresse ici au mouvement des particules fluides sous les vagues, dans le cas où l'amplitude A des vagues n'est pas infiniment petite. On rappelle le champ de vitesse $\vec{u} = (u, v)$ dans le plan

(O, x, z) avec l'axe z dirigé vers le haut et pour une onde plane interfaciale de pulsation ω et de nombre d'onde k :

$$\begin{cases} u &= \omega A \exp(kz) \cos(kx - \omega t) \\ v &= \omega A \exp(kz) \sin(kx - \omega t). \end{cases} \quad (3.1)$$

On écrira la position lagrangienne de la particule :

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 + x_1(t) + x_2(t) + \dots \\ z(t) &= z_0 + z_1(t) + z_2(t) + \dots \end{cases} \quad (3.2)$$

où l'indice i correspond aux ordres successifs d'approximation.

1. On considère des ondes d'amplitude $A = 1$ m et de période $T = 8$ secondes à la surface de l'eau. Montrer qu'il s'agit d'ondes de gravité. Pour le justifier on pourra estimer la longueur d'onde à partir de la relation de dispersion $\omega(k)$ (que l'on peut retrouver simplement par analyse dimensionnelle) et comparer à la longueur capillaire. A quel condition peut-on considérer qu'il s'agit d'ondes linéaires ? La condition est-elle satisfaite ici ?
2. En intégrant les équations de la vitesse, calculer au premier ordre $x_1(t)$ et $z_1(t)$. On choisira l'origine des temps pour que $x_1(t = 0) = z_1(t = 0) = 0$.
3. A cet ordre d'approximation quelle est l'amplitude du déplacement de la particule fluide ? Comment varie-t-elle avec la profondeur z_0 ? En déduire la trajectoire d'une particule fluide et le sens de rotation. Faire un schéma.
4. On poursuit le calcul à l'ordre suivant. Pour cela, exprimer $dx_2(t)/dt$ en fonction des quantités connues à l'ordre 1. Calculer $dx_2(t)/dt$ à l'ordre 1. On rappelle la relation trigonométrique $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
5. En déduire $x_2(t)$. Montrer qu'il existe un terme de dérive lagrangienne en x à cet ordre. Le calcul de z_2 (non demandé) est similaire mais donne une correction de moyenne temporelle nulle. En déduire l'effet de la correction d'ordre 2 sur la trajectoire des particules fluides. Faire un schéma.
6. Application numérique : calculer la dérive de Stokes en surface pour des ondes d'amplitude $A = 1$ m et de période $T = 8$ secondes. Comparer la dérive de Stokes à la vitesse de phase et à la vitesse eulérienne maximale.

3.3 Houles Atlantique

A la pointe de Penmarch (Finistère) on enregistre le 6 décembre 2017 à 8 heures une houle de Sud-Ouest, d'amplitude 1 mètre et de période 9 secondes. A 15 heures le même jour, houle SW, 2 mètres et période 8 secondes. Déterminer la date, le lieu et l'amplitude du coup de vent.

3.4 Sillage d'un bateau

On cherche à déterminer le sillage stationnaire généré à l'arrière d'un bateau.

1. Rappeler la relation de dispersion $\omega(k)$ pour les ondes de gravité à la surface d'une eau profonde. En déduire la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g de ces ondes. Quel est leur rapport ? Dire en une phrase ce qui caractérise ces deux types de vitesse. Tracer schématiquement l'évolution de ces deux vitesses en fonction de la longueur d'onde, λ .
2. On lance un pavé dans une mare suffisamment profonde, tracer la figure des vagues à la surface de l'eau au bout d'un temps T en mettant une échelle correcte d'espace sur le croquis.
3. On considère maintenant un bateau se déplaçant en ligne droite à vitesse constante U de gauche à droite (M à O pendant le temps t). On rappelle que les vagues stationnaires par rapport au bateau sont telles que $v_\varphi = U \cos \varphi$. Pourquoi ?
4. Au temps t où le bateau est en O , quel est le lieu géométrique des points I correspondants à la condition de stationnarité pour les vagues émises dans toutes les directions φ possible par le bateau lorsqu'il était en M ? Construire à partir de ce lieu, celui de la position H du maximum du paquet d'onde de toutes les vagues émises en M au bout du temps t où le bateau est en O .
5. Déduire géométriquement de ce lieu des points H l'angle maximal α_0 , correspondant sillage du bateau pour toutes les ondes émises par les positions successives du bateau entre M et O . A.N.
6. Sous quel angle φ_0 les ondes, présentent sur le dièdre d'angle α_0 , se propagent-elles ? Quelle est leur longueur d'onde en fonction de U et de g ?

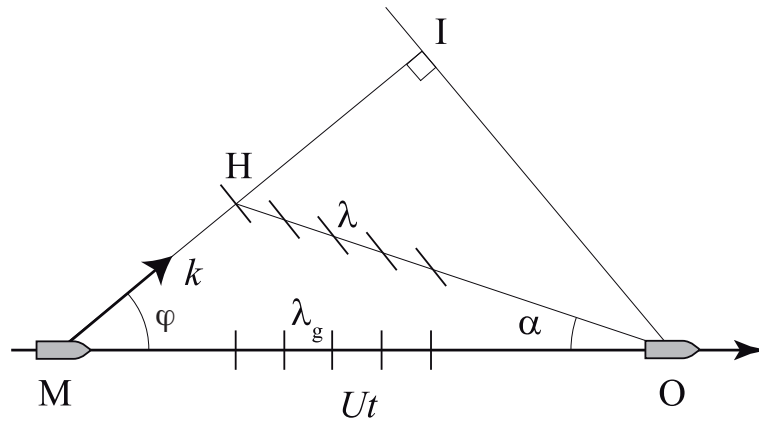


FIGURE 3.3 – Sillage en « V » de Kelvin

Chapitre 4

TD 4 : Ondes en eau peu profonde

4.1 Solitons

On reprend l'étude des ondes de surface, mais en se plaçant maintenant dans la situation où la profondeur d'eau h_0 est petite. On ne considère pour simplifier que les ondes de gravité (de grande longueur d'onde), et on néglige l'effet de la tension de surface ($\gamma = 0$). On va s'intéresser en particulier à la situation où les ondes sont *non linéaires* (leur amplitude ζ_0 n'est pas infiniment petite) et *faiblement dispersives* (la profondeur h_0 est petite mais pas infiniment petite comparée à la longueur d'onde). Dans cette situation, on va voir que l'effet combiné des non-linéarités et de la dispersion fait qu'il existe des perturbations localisées, appelées *solitons*, pouvant se propager sans se déformer.

Dans le cas d'une profondeur d'eau h_0 quelconque, on peut montrer que la relation de dispersion des ondes de gravité ($\gamma = 0$) s'écrit :

$$\omega(k) = \sqrt{kg \tanh(kh_0)}. \quad (4.1)$$

1. Si la profondeur d'eau est faible sans être infiniment faible, exprimer la vitesse de phase c des ondes au deuxième ordre en $h_0 k$. (On rappelle le développement limité au voisinage de 0 : $\tanh \theta = \theta - \theta^3/3 + \mathcal{O}(\theta^5)$).
2. Dans le cas où la profondeur d'eau est infiniment faible comparée à la longueur d'onde, mais où cette fois-ci l'amplitude ζ_0 des ondes n'est pas infiniment petite, justifier (qualitativement en raisonnant sur une perturbation de "petite" longueur d'onde voyageant sur la crête d'une onde de grande longueur d'onde et d'amplitude ζ_0) que la vitesse de propagation de la perturbation peut s'écrire sous la forme

$$c \simeq c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\zeta_0}{h_0} \right). \quad (4.2)$$

Expliquer graphiquement l'assymétrie d'une vague lorsque celle-ci approche du rivage.

3. Donner l'expression de c lorsque l'on prend en compte à la fois les effets de profondeur finie (faible dispersion) et d'amplitude finie (non-linéarité). Pour qu'une perturbation de largeur ℓ et d'amplitude a se déplace à une vitesse constante sans se déformer, quelle doit être la relation d'ordre de grandeur entre ℓ et a ?
4. Montrer que pour une onde progressive en $\zeta(x, t) = \zeta_0 e^{i(kx - \omega t)}$, la relation de dispersion impose que $\zeta(x, t)$ doit être solution d'une équation différentielle de la forme :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\zeta}{h_0} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0, \quad (4.3)$$

où β est une constante que l'on déterminera.

5. On admettra que la fonction :

$$\zeta(x, t) = \frac{a}{ch^2 \left[\sqrt{\frac{3a}{4h_0^3}} (x - Ct) \right]} \quad (4.4)$$

(tracée sur la figure 4.1) est solution de l'équation de KdV, avec la vitesse de propagation $C = c_0(1 + \frac{a}{2h_0})$. La vérification est laissée aux plus courageux ! La relation entre ℓ et a de la question 3 est-elle satisfaite ?

6. A.N. Une expérience a été menée en 1834 par J.S. Russel afin d'étudier ce phénomène, dans un aqueduc de 90 m de longueur et de 1,5 m de profondeur (figure 4.2). Calculer l'amplitude et la vitesse de propagation de ce soliton, d'une extension d'environ 4 m.

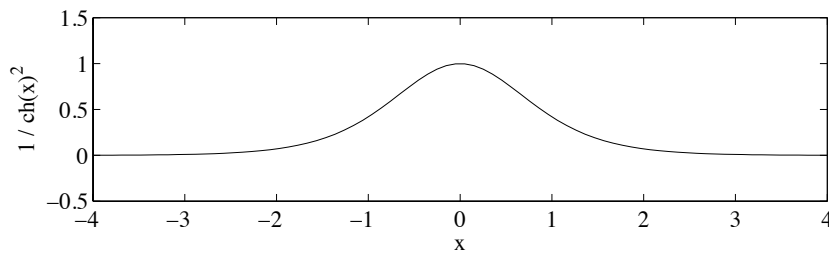


FIGURE 4.1 – Fonction $1/ch(x)^2$.



FIGURE 4.2 – Reproduction, le 12 juillet 1995 sur le Union Canal (Edinbourg), de l'expérience historique de John Scott Russell de 1834 (www.ma.hw.ac.uk/solitons/press.html).

4.2 "Ondes de bord"

On cherche ici à montrer que des ondes de gravité (grandes longueurs d'ondes) peuvent se propager le long d'une plage en pente douce, et à trouver la relation de dispersion de ces ondes. L'existence de ces ondes permet d'expliquer certaines structures d'érosion périodiques que l'on peut observer sur les plages (figure 4.3).

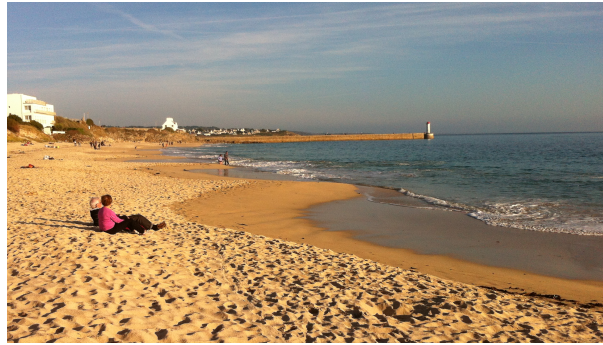


FIGURE 4.3 – Photographie de structures d'érosion en "feson" visible le long de la plage à Audierne. La période de la houle résiduelle était de 16 secondes et la période spatiale des figures d'érosion d'environ 35 mètres.

On choisit l'axe $0x$ parallèle à la plage, l'axe Oy dirigé vers le large et $0z$ vers le haut. La profondeur de l'eau près de la plage en l'absence d'ondes s'écrit $h_0(y)$ (elle ne dépend pas de x) et l'on choisit $y = 0$ sur la ligne triple solide—liquide—gaz, c'est-à-dire que $h_0(0) = 0$. L'origine $z = 0$ correspond au niveau de l'eau au repos (figure 4.4). On supposera :

- que la profondeur d'eau est faible devant les longueurs d'ondes
- que la pente est aussi faible.

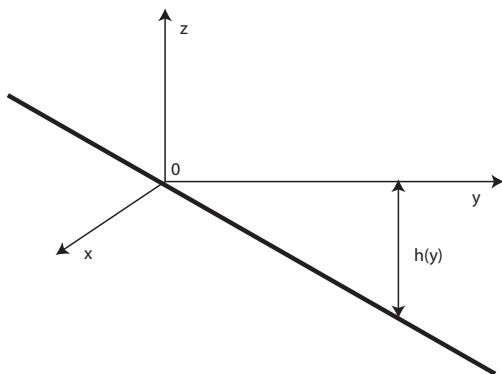


FIGURE 4.4 – Schéma de la plage et des axes. La pente de la plage sera supposée faible.

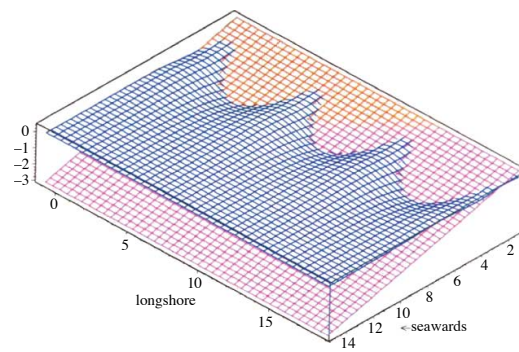


FIGURE 4.5 – Simulation d'ondes de bord (Edge waves) d'après Jonhson 2007.

On écrit $h(x, y, t) = h_0(y) + \zeta(x, y, t)$ l'équation de l'interface déformée et (u, v, w) les 3 composantes de la vitesse de l'eau.

1. Dans la limite des grandes longueurs d'ondes montrer que les variations des composantes horizontales de la vitesse avec la profondeur sont faibles.

2. Justifier que la conservation de la masse au point (x, y) , intégrée sur la hauteur, s'écrit :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(h_0 u)}{\partial x} + \frac{\partial(h_0 v)}{\partial y} = 0. \quad (4.5)$$

3. En raisonnant sur les ordres de grandeur, montrer que dans la limite des ondes de faibles amplitudes $w \ll u$ (on supposera que u et v sont du même ordre de grandeur, ce que l'on vérifiera par la suite à la question 10). En déduire que la pression est hydrostatique dans l'eau et s'écrit si on néglige la tension de surface :

$$p(x, y, z, t) = P_0 + \rho g [\zeta(x, y, t) - z]. \quad (4.6)$$

4. Ecrire l'équation d'Euler dans la limite des faibles amplitudes de vague pour les composantes u et v et transformer les termes de pression en utilisant l'expression trouvée à la question précédente.
5. En dérivant l'équation 4.5 par rapport au temps établir l'équation d'onde suivante

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial(gh_0 \partial \zeta / \partial x)}{\partial x} + \frac{\partial(gh_0 \partial \zeta / \partial y)}{\partial y}. \quad (4.7)$$

6. Vérifier que si h_0 est constant on retrouve l'équation d'onde en eau peu profonde qui admet pour solution des ondes de gravité non dispersives ayant pour célérité $v_\varphi = \sqrt{gh_0}$.

On recherche maintenant des solutions d'ondes progressives dans la direction Ox sous la forme : $\zeta = Z(y) \exp i(kx - \omega t)$.

7. En réinjectant dans l'équation d'onde (4.7) obtenir l'équation que doit satisfaire la fonction $Z(y)$:

$$Z''(y) + \frac{h'_0(y)}{h_0} Z'(y) + \left[\frac{\omega^2}{gh_0} - k^2 \right] Z(y) = 0 \quad (4.8)$$

8. Lorsque y devient grand, l'équation précédente se simplifie. Montrer que la seule solution d'énergie finie s'écrit : $Z(y) \propto \exp(-ky)$.
9. Montrer que cette fonction $Z(y)$ peut-être solution de l'équation complète si la bathymétrie est linéaire, $h_0(y) = \beta y$. En déduire la relation de dispersion $\omega(k)$ de ces ondes.
10. Justifier que ces ondes portent le nom "d'ondes de bord". Sont-elles dispersives ? Vous calculerez v_φ et v_g . Quelles sont les longueurs d'onde qui se propagent le plus vite ?
11. Calculer les vitesses u et v . Décrire le mouvement des particules fluides.
12. Existe-t-il un problème dans nos approximations en $y = 0$?
13. Peut-on avoir des ondes stationnaires le long de la plage qui pourraient expliquer les motifs de la figure 4.3 ? Si la période des ondes est d'environ 16 secondes et la pente de 2 %, quelle sera la longueur d'onde de ces ondes ? Est-ce que cela correspond aux données de la figure 4.3 ?

Chapitre 5

TD 5 : Ondes internes de gravité

5.1 Ondes internes dans un liquide stratifié

On considère un liquide incompressible stratifié, c'est-à-dire dont la masse volumique ρ est une fonction de l'altitude z .

5.1.1 Fréquence de Brunt-Väisälä

Montrer qu'un tel profil est localement stable dans le champ de gravité si la fonction $G(z) = -\frac{d\rho}{dz}$ est positive. Pour cela on pourra étudier le comportement d'une particule fluide déplacée verticalement d'une petite quantité Δz à partir de sa position initiale z_0 .

a) Montrer qu'en l'absence de force visqueuse et en négligeant la diffusion moléculaire, une telle particule fluide aura un mouvement oscillatoire dont on déterminera la fréquence propre d'oscillation N , dite fréquence de Brunt-Väisälä en l'honneur de deux météorologues anglais et finlandais.

b) Quel doit être le profil de $\rho(z)$ pour que N soit constante dans tout le fluide.

c) En mer, si on mesure $N \approx 10^{-2}$ Hz, qu'elle est l'échelle typique des variations de ρ ?

5.1.2 Relation de dispersion des ondes internes

Dans un réservoir contenant un fluide stratifié tel que $N = \text{Cste}$ on fait osciller sinusoïdalement un petit cylindre horizontal de diamètre d avec une très faible amplitude A . On recherche maintenant à quelles conditions des ondes planes propagatives de vecteur d'onde $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ peuvent se propager dans un tel milieu incompressible. Pour cela on pose :

$$\begin{cases} \vec{u} &= \vec{U} \exp i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t), \\ p &= P \exp i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \\ \Delta \rho &= \Gamma \exp i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \end{cases}$$

où p est l'écart à la pression hydrostatique, et $\Delta \rho$ l'écart à la distribution initiale de densité. Les quantités $\vec{U}$, P et Γ sont supposées petites.

a) On néglige la diffusion ($D\rho/Dt = 0$). Montrer qu'on a alors la relation

$$\frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} + w \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0.$$

b) Montrer que la conservation de la masse impose $\vec{u} \cdot \vec{k} = 0$ et en déduire que les ondes sont transverses.

c) Ecrire l'équation de Navier-Stokes en négligeant la dissipation visqueuse. En éliminant les variables $\vec{U}$, P et Γ montrer que la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega = \frac{N}{2\pi} \sqrt{\frac{k^2 - k_z^2}{k^2}}$$

5.1.3 Structure des ondes internes

On supposera que $k_y = 0$ (toujours possible par rotation des axes) et on introduira θ , angle du vecteur d'onde $\vec{k}$ avec la verticale.

a) Montrer que ω ne dépend que de N et de θ et que pour une pulsation donnée il existe quatre directions de $\vec{k}$ possibles à une certaine condition sur ω que l'on précisera.

b) Pour un de ces nombres d'ondes (par exemple pour $0 < \theta < \pi/2$), décrire le mouvement des plans équi-phases et en déduire la direction et le module de la vitesse de phase $\vec{v}_\phi$.

c) Calculer la vitesse de groupe de ces ondes définie par $\vec{v}_g = (\frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z})$. Montrer que $\vec{v}_g \cdot \vec{v}_\phi = 0$ et que $\vec{v}_g + \vec{v}_\phi$ a une direction particulière que l'on précisera.

d) Que vaut $\vec{v}_g$ lorsque $\omega \rightarrow \frac{N}{2\pi}$? Que se passe-t-il alors? Représenter la structure spatiale originale des vecteurs $\vec{k}$, $\vec{u}$, $\vec{v}_\phi$ et $\vec{v}_g$ si $0 < \theta < \pi/2$ et si $\pi/2 < \theta < \pi$. En particulier que vaut l'angle β entre $\vec{v}_g$ et l'axe vertical si $0 < \theta < \pi/2$ et si $\pi/2 < \theta < \pi$? Que se passe-t-il dans le cas des très faibles pulsations ω .

e) Lorsque la pulsation ω est fixée, quelle longueur peut sélectionner la longueur d'onde et la largeur du paquet d'onde?

f) Application : Un cylindre horizontal oscille verticalement et périodiquement mais non-sinusoïdalement. Si la fréquence fondamentale correspond à un tiers de la fréquence de Brunt-Väisälä?, déterminer les directions de la vitesse de groupe, de la vitesse de phase, et le rapport de ces deux vitesses pour tous les modes excités.

g) Que se passe-t-il si le gradient de densité varie en z et présente un minimum?

h) De telles ondes peuvent-elles exister dans l'atmosphère et en quoi N est changé?

5.1.4 Ondes océanes

a) L'océan est un milieu stratifié à cause de gradients verticaux de température et de salinité. On observe que la fréquence de Brunt-Väisälä locale présente un maximum $N \sim 0.01$ s aux environs de $[-100, -500]$ mètres (niveau de la thermocline). Montrer que l'existence de ce maximum conduit à un changement de direction de la vitesse de groupe. En déduire l'effet de cette couche thermocline.

b) Quels mécanismes peuvent atténuer les ondes internes?

Chapitre 6

TD n°6 : Ondes dans les fluides en rotation

6.1 Ondes dans les fluides en rotation

Inspiré d'un examen de M2

Nous allons étudier la dynamique d'un fluide parfait, homogène et incompressible, contenu dans une cuve en forte rotation à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ constante et dirigée selon l'axe vertical Oz . On donne l'équation de Navier-Stokes dans un référentiel tournant à la vitesse angulaire :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P' - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{u} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{u},$$

où P' est une nouvelle pression tenant compte de l'équilibre hydrostatique et de la force centrifuge.

6.1.1 Etude qualitative

On considère le fluide en rotation solide, donc au repos dans le référentiel tournant. On suppose qu'une particule fluide isolée est animée d'une vitesse relative $\vec{u}_0$ de direction quelconque horizontale. Montrer que sous l'action de la seule force de Coriolis sa trajectoire serait un cercle dont vous calculerez le rayon ainsi que la période de rotation T . Ce mouvement est-il cyclonique (dans le sens de rotation de la cuve) ou anticyclonique ? Comparer T à la période de rotation de la cuve. Existe-t-il une analogie avec un mouvement d'une particule en électromagnétisme ?

Nous allons voir maintenant que ce comportement peut conduire à la propagation d'ondes dans un fluide en rotation.

6.1.2 Ondes inertielles dans un fluide en rotation (d'après G. K. Batchelor p. 559)

On s'intéresse maintenant à champ de vitesse axisymétrique $\vec{u}(r, z, t) = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta + u_z \vec{e}_z$ par rapport à l'état de « rotation solide ».

a) Montrer que l'on peut introduire la fonction de courant de Stokes $\Psi(r, z, t)$ tel que $\vec{u} = u_\theta \vec{e}_\theta + \vec{\text{rot}}\left(\frac{\Psi}{r} \vec{e}_\theta\right)$ pour décrire l'écoulement, et montrer que Ψ est constant sur une ligne de courant.

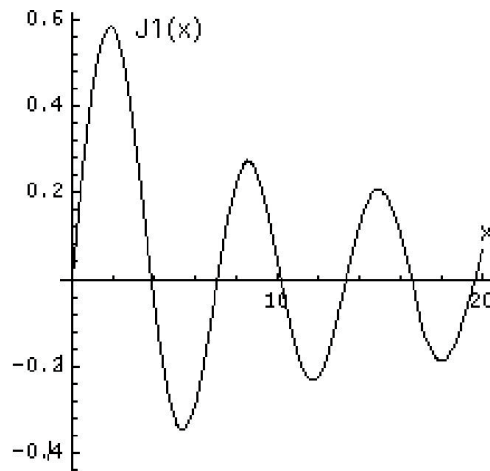


FIGURE 6.1 – Fonction de Bessel de 1ère espèce.

b) Ecrire l'équation d'Euler linéarisée (faibles vitesses). A quoi correspond cette approximation pour les nombres d'Ekman et de Rossby ? Introduire la fonction Ψ et éliminer la pression et la vitesse orthoradiale. En déduire l'équation d'évolution de Ψ :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right] + 4\Omega^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0.$$

c) On cherche des solutions sous la forme d'ondes planes propagatives dans la direction verticale $\Psi(r, z, t) = ArF(r) \sin(kz - \omega t)$. Trouver l'équation que doit satisfaire la fonction F . Montrer que k et ω sont deux variables indépendantes si le milieu est infini. Sachant que les fonctions de Bessel de 1ère espèce $J_1(Kr)$ sont solutions de l'équation $J_1'' + \frac{J_1'}{r} + (K^2 - 1/r^2)J_1 = 0$, en déduire une condition sur la pulsation ω .

d) On suppose maintenant un réservoir cylindrique de rayon a , et l'on notera γ_n , $n = 1, 2, \dots$ les zéros successifs de la fonction J_1 (voir figure). Par exemple $\gamma_1 = 3,83$. Trouver la relation de dispersion $\omega(k)$ de ces ondes. Calculer le rapport entre la vitesse de groupe de ces ondes et leur vitesse de phase. Est-il positif et inférieur à 1 ?

e) Pour une hauteur de cylindre h , chercher les solutions sous forme d'ondes stationnaires (deux ondes de même amplitude contra-propagatives) et montrer que les pulsations propres possibles sont quantifiées.

f) Pour le premier mode d'onde stationnaire, exprimer u_r , u_z et aussi u_θ en fonction de Ψ . En déduire que la vitesse orthoradiale change de signe n fois le long du rayon de la cuve.

6.1.3 Ondes de Rossby (d'après D. J. Tritton p. 232)

On considère maintenant un cylindre vertical tournant à vitesse angulaire constante Ω . Ce cylindre est limité par deux plans non parallèles d'équation $z = L$ et $z = \alpha y$, et l'on supposera dans la suite $\alpha \ll 1$.

a) Ecrire l'équation linéaire d'Euler dans le repère tournant (vitesse faible). On supposera que l'échelle de temps caractéristique T est lente si α est petit, et l'on recherchera les solutions sous la

forme,

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{u}_0(x, y, z, T) + \alpha \vec{u}_1(x, y, z, T) + \dots \\ p' &= p'_0(x, y, z, T) + \alpha p'_1(x, y, z, T) + \dots,\end{aligned}$$

avec $\frac{\partial}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial T}$. Ecrire les équations d'évolution des composantes u , v et w de la vitesse ainsi que la conservation de la masse jusqu'à l'ordre 1 en α .

b) Ecrire *soigneusement* les conditions aux limites en $z = L$ et $z = \alpha y$ au même ordre, et sans tenir compte des parois verticales.

c) Etude à l'ordre 0. Montrer que p'_0 et $\vec{u}_0$ ne dépendent pas de z . En déduire que l'on peut décrire le mouvement en introduisant une fonction de courant Ψ que l'on reliera à la pression $p'_0(x, y, T)$. Quelles sont les propriétés d'un tel écoulement ?

d) Etude à l'ordre 1 en α . A partir de la conservation de la masse, montrer que la vitesse verticale s'écrit

$$w_1 = \frac{L - z}{2\Omega} \frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial T}.$$

On montrera ensuite que la condition aux limites pour ne pas avoir de vitesse normale sur le fond incliné impose pour Ψ l'équation,

$$\frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial T} + \frac{2\Omega}{L} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0.$$

f) Montrer que cette équation admet des solutions en ondes planes propagatives de la forme $\Psi = A \exp i(lx + my - \omega t)$, (avec $T = \alpha t$) dont on donnera l'équation de dispersion.

g) Dans le cas $m = 0$, calculer la vitesse de groupe et la vitesse de phase, et décrire les propriétés de cette onde.

6.2 Ondes de Kelvin dans la Manche

Inspiré d'un examen M2

Pour interpréter, partiellement, les différences d'amplitude des marées dans la Manche entre les côtes de France et celles de Grande-Bretagne, on s'intéresse aux d'ondes de surface en eau peu profonde près d'une paroi et en présence de force de Coriolis : ce sont les ondes de Kelvin. Pour les applications numériques, on prendra : hauteur moyenne d'eau dans la Manche, $h = 100\text{m}$, viscosité cinématique, $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ et tension interfaciale, $\gamma = 7010^{-3}\text{N/m}$.

1. L'onde de marée remonte la Manche. Compte tenu du sens alternatif de déplacement des particules fluides, du sens de rotation de la Terre, pouvez-vous justifier simplement le fait que l'amplitude des marées est plus forte sur les côtes de France ? Trouverait-on le même résultat si la Manche était orientée Nord-Sud ?

2. A partir de la figure 6.2 et sachant que la distance Brest-Dunkerque est de l'ordre de 600 km et que la marée est semi-diurne (période 12 h 25 min), estimer la vitesse de phase, v_φ , et la longueur d'onde, λ , de l'onde de marée remontant la Manche. Est-on dans le cas d'une propagation en eau peu profonde ? A quelle condition la tension de surface est-elle négligeable ?

Pour une étude plus quantitative du phénomène, on va supposer que la Manche est un canal rectiligne de section rectangulaire ($L = 100\text{ km}$ et $h = 100\text{ m}$) avec la France d'un côté et l'Angleterre de l'autre. On donne l'équation de Navier-Stokes dans un référentiel tournant :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{u} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{u},$$



FIGURE 6.2 – Propagation de l’onde de marée dans la Manche : les lignes pointillées sont les positions du maximum de l’onde de marée (isophase) en fonction de l’heure et les lignes continues représentent les lignes d’égale amplitude de marées (même marnage) montrant un net maximum près de la côte française.

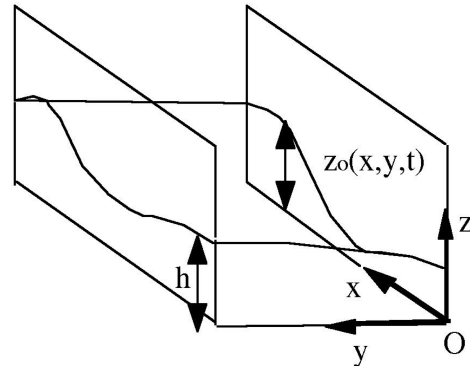


FIGURE 6.3 – Vue schématique de la propagation d’une onde de Kelvin entre deux parois verticales ($y = 0$ et $y = L$).

où $\vec{\Omega}$ est la composante verticale du vecteur rotation instantanée de la terre (on prendra une latitude moyenne de 45° N), P la pression et g la gravité apparente qui tient compte des effets de force centrifuge (g est bien verticale localement et $g = 9,81 \text{ m/s}^2$).

- On supposera pour la suite que le nombre de Rossby est suffisamment petit et que le fluide est un fluide parfait. On supposera de plus qu’il n’existe pas de vitesse transversale c’est-à-dire selon y (voir figure 6.3 où $z = 0$ au fond du canal, x dans le sens de l’écoulement et $y = 0$ sur les côtes françaises), soit $u(x, y, z, t) = (u, 0, w)$ et que la déformation de l’interface est faible $z_0(x, y, t) = h + \zeta(x, y, t)$ avec $\zeta \ll h$. Ecrire l’équation de Navier-Stokes et l’équation de continuité dans ce cas.
- A partir des composantes du gradient de pression, justifier que l’on peut écrire $P(x, y, z, t) = P_{atm} + \rho g[z_0(x, y, t) - z]$.
- En eau peu profonde, la vitesse horizontale dépend-elle de z ? A partir de l’équation de conservation, en déduire que $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{h} \frac{\partial \zeta}{\partial t}$. Montrer que $u(x, y, t)$ satisfait une équation d’onde indépendante de Ω dont on calculera la vitesse de phase. Comparer cette vitesse à l’évaluation de la question 2.
- On écrira : $u(x, y, t) = u_0(y) \exp[ik(x - ct)]$ l’onde de Kelvin qui remonte la Manche. Montrer que ζ a une dépendance exponentielle en y dont on déterminera l’échelle caractéristique δ . En comparant cette échelle à la largeur moyenne de la Manche $L = 100 \text{ km}$, comparer l’amplitude des marées prédites sur les deux côtes. Calculer l’ordre de grandeur de u_0 pour une amplitude de marée de 4 m. Comparer aux mesures présentées sur la figure 6.2.



MASTER 1 DE MÉCANIQUE (2017-2018)

ONDES ET ACOUSTIQUE DANS LES FLUIDES

Marc Rabaud

EXAMEN DU 24 JANVIER 2018

(Durée : 3 heures - sans document, ni calculatrice, ni portable)

Pour les calculs numériques, un seul chiffre significatif est demandé.

Sauf mention contraire, les réponses doivent être justifiées de manière précise et concise. Pour les questions dont le résultat est donné, les justifications doivent être particulièrement soignées.

Les différentes questions de ce problème ne sont pas toutes indépendantes. Il est toutefois possible d'admettre des résultats, à condition de le mentionner clairement.

I : Champ de vitesse sous une onde plane à la surface d'un liquide

On donne le potentiel de vitesse $\Phi(x, z)$ sous une onde plane d'équation $\zeta = A \cos \varphi$, avec $\varphi = kx - \omega t$:

$$\Phi(x, z) = -i \frac{\omega}{k} A \exp(kz) \exp i(kx - \omega t) \quad (6.1)$$

1. Quelle hypothèse permet dans ce problème de dire que la vitesse dérive d'un potentiel ?
2. Calculer le champ de vitesse $\vec{v} = (u, v)$ correspondant à ce potentiel.
3. Dessiner, sous une vague et à un instant donné, le profil de vitesse $\vec{v}(z)$ pour différents x correspondant aux phases $\varphi = 0, \pi/2, \pi$ et $3\pi/2$.
4. Ce potentiel peut-il correspondre à des ondes en eau peu profonde ? Pourquoi ?

II : Atténuation des ondes transverses dans un fluide visqueux

On considère un fluide visqueux incompressible en contact avec une plaque plane illimitée animée, dans son plan yOz , d'un mouvement oscillatoire selon l'axe y : $V(t) = V_0 \cos \omega t$. On cherche à décrire le mouvement induit à temps long dans le fluide situé dans le demi-espace $x > 0$.

1. Faire un schéma et expliquer pourquoi l'on peut ignorer la force de gravité dans ce problème.
2. Justifier par des arguments de symétrie que la vitesse dans le fluide n'est fonction que d'une variable d'espace et du temps.

3. Ecrire la relation de conservation de la masse. En déduire que si le fluide est incompressible le vecteur vitesse n'a qu'une seule composante. Vérifier qu'alors l'équation de conservation de la masse est bien satisfaite.
4. Ecrire l'équation de Navier-Stokes pour les trois composantes de la vitesse. Justifier que la pression peut-être considérée comme constante.
5. Montrer que le terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes est ici exactement nul. Comment appelle-t-on ce type d'écoulement ? Dans les problèmes où ce terme n'est pas nulle, quelle hypothèse faut-il faire sur le mouvement de la plaque pour pouvoir négliger ce terme non-linéaire ?
6. Ecrire finalement l'équation différentielle satisfaite par la composante non nulle de la vitesse.
7. Quelle est la condition au limite pour la vitesse au niveau de la plaque ?
8. Rechercher à quelle condition des ondes en $\exp i(kx - \omega t)$ peuvent-être solution du problème ? On supposera que ω est un réel positif. A-t-on affaire ici à des ondes longitudinales ou à des ondes transverses ? Quelle est la polarisation de cette onde ?
9. Montrer que le nombre d'onde doit être complexe et calculer sa partie réelle k_r et sa partie complexe k_i . On pourra introduire $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$. Quelle est la dimension de cette quantité ? Quelles conditions aux limites permet de choisir les signes des coefficients ? Quel est alors le sens de propagation de l'onde ?
10. Ecrire la forme finale de la vitesse dans le fluide. Tracer l'allure du champ de vitesse à un instant et tracer l'enveloppe de ces profils à tout temps. Que représente physiquement la quantité δ pour l'enveloppe du champ de vitesse ? Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Que vaut le rapport de ces deux vitesses ?
11. Comparer la longueur d'onde de ces ondes à la longueur d'atténuation. Peut-on parler d'ondes progressives ? Comment appelle-t-on ces ondes ?
12. Estimer la valeur numérique de δ pour une fréquence de 100 Hz, (1) dans l'eau et (2) dans une huile de viscosité cinématique $\nu = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$.
13. Que se passe-t-il pour δ et pour la vitesse de phase si la viscosité tend vers zéro ? En conclure sur la possibilité de propager des ondes transverses dans un fluide parfait.
14. Comparer à ce qui se passerait pour une oscillation perpendiculaire de la paroi. A quel type d'onde aurait-on alors affaire ?

III : Propagation du son

On se propose d'étudier les petites vibrations isentropiques d'un liquide parfait compressible dont on connaît l'équation d'état sous la forme $P = P_{eq}(\rho, S)$, où S est l'entropie. On considère donc une perturbation du fluide initialement au repos (vitesse nulle, densité ρ_0 et pression P_0) et on écrit les champs de pression et de densité sous la forme :

$$P(\vec{r}, t) = P_0 + p(\vec{r}, t) \quad \rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \rho'(\vec{r}, t) \quad (6.2)$$

avec $|p(\vec{r}, t)| \ll P_0$ et $|\rho'(\vec{r}, t)| \ll \rho_0$. On considèrera de même que la vitesse $\vec{u}(\vec{r}, t)$ est "petite" (on précisera ensuite par rapport à quoi).

1. Ecrire l'équation d'Euler et l'équation de continuité au premier ordre dans les petits paramètres. Montrer que l'on arrive à un système d'équations de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -c^2 \vec{\nabla} \rho' , \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 , \end{array} \right. \quad (6.3)$$

où l'on explicitera la constante c en fonction de la dérivée de l'équation d'état.

2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\rho'(\vec{r}, t)$. Comment nomme-t-on cette équation ? Montrer qu'à une dimension les solutions sont de la forme $\rho'(x, t) = f(u)$ avec $u = x \pm ct$. Commentez. Peut-on maintenant donner une signification physique à la constante c ?
3. On cherche des solutions sous la forme d'ondes planes monochromatiques :

$$\vec{u}(x, t) = \vec{\mathcal{U}} \exp i(kx - \omega t) \quad \rho'(x, t) = \mathcal{R} \exp i(kx - \omega t) . \quad (6.4)$$

Ecrire la relation de dispersion entre ω et k .

4. Apporter des précisions sur l'hypothèse de "petite vitesse" utilisé en début d'exercice. Expliquer alors dans quelle limite un fluide peut être considéré comme incompressible.



MASTER 1 DE MÉCANIQUE (2017-2018)

ONDES ET ACOUSTIQUE DANS LES FLUIDES

Marc Rabaud

EXAMEN DU 30 AOÛT 2018

(Durée : 3 heures - sans document, ni calculatrice, ni portable)

Pour les calculs numériques, un seul chiffre significatif est demandé.

Sauf mention contraire, les réponses doivent être justifiées de manière précise et concise. Pour les questions dont le résultat est donné, les justifications doivent être particulièrement soignées.

Les différentes questions de ce problème ne sont pas toutes indépendantes. Il est toutefois possible d'admettre des résultats, à condition de le mentionner clairement.

Ondes dans un liquide de densité variable

On considère un liquide incompressible et dont la masse volumique au repos ρ_0 ne dépend que de l'altitude z . On supposera l'axe z dirigé vers le haut avec une origine $z = 0$ à la surface du liquide.

1. A quelle condition ce profil $\rho_0(z)$ le fluide est-il stable dans le champ de gravité ? Pour cela on pourra étudier le comportement d'une particule fluide déplacée verticalement d'une petite quantité Δz à partir de sa position initiale z_0 . Quelles sont les forces en présence ? On supposera cette condition satisfaite pour la suite.
2. Ecrire l'équation de l'hydrostatique et en déduire l'expression de la pression hydrostatique $P_0(z)$. Les fonctions hydrostatiques P_0 et ρ_0 peuvent-elles dépendre d'autres variables spatiales ?
3. On suppose qu'une particule à l'altitude z est déplacée verticalement d'une petite quantité dz . Ecrire le principe fondamental de la dynamique pour cette particule. En déduire que sous l'action de la gravité seule, une particule fluide déplacée verticalement aurait un mouvement oscillatoire dont on déterminera la pulsation et la fréquence propre N . Quels sont les mécanismes physiques qui pourraient atténuer l'amplitude de l'oscillation ?
4. Quel doit être le profil de base $\rho_0(z)$ pour que la fréquence d'oscillation N ne dépende pas de z ?

5. En mer, si on mesure à une certaine profondeur $N \approx 10^{-2}$ Hz, en déduire l'échelle verticale sur laquelle ρ varie de 1 % ? Quelles sont les origines des gradients de masse volumique en mer ?

Dans un grand réservoir contenant un fluide stratifié tel que $N = \text{Cste}$, on fait osciller verticalement et sinusoïdalement un petit objet cylindrique horizontal de diamètre d avec une très faible amplitude A . On cherchera maintenant à décrire le champ de vitesse $\vec{u}$ généré par ce mouvement de l'obstacle et en particulier à quelles conditions des ondes planes propagatives de vecteur d'onde $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ peuvent se propager dans un tel milieu incompressible. On posera :

$$\begin{cases} \vec{u} &= \vec{U} \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \\ p &= P \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \\ \Delta\rho &= \Gamma \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \end{cases}$$

où p est l'écart à la pression hydrostatique P_0 , et $\Delta\rho$ l'écart à la distribution initiale de densité. Les quantités $\vec{U}$, P et Γ sont supposées petites.

6. On néglige la diffusion moléculaire. En déduire que $D\rho/Dt = 0$ et montrer qu'on a alors la relation

$$\frac{\partial \Delta\rho}{\partial t} + w \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0.$$

. Que représente w ?

7. Ecrire la conservation de la masse. En déduire que $\vec{u} \cdot \vec{k} = 0$. De quel type d'onde s'agit-il ? Quelles sont les différences avec les ondes sonores ?
8. Ecrire l'équation de Navier-Stokes en négligeant la dissipation visqueuse. En éliminant les variables $\vec{U}$, P et Γ montrer que la relation de dispersion de ces ondes s'écrit :

$$\omega = 2\pi N \sqrt{\frac{k^2 - k_z^2}{k^2}}$$

On supposera maintenant que $k_y = 0$ (toujours possible par rotation des axes) et on introduira θ , angle du vecteur d'onde $\vec{k}$ avec la direction verticale.

9. Montrer que ω ne dépend que de N et de θ et que pour une pulsation donnée il existe quatre directions de $\vec{k}$ possibles à une certaine condition sur ω que l'on précisera. Dessiner ces 4 directions dans le plan (x, z) .
10. Pour un de ces directions du vecteur d'onde (par exemple pour $0 < \theta < \pi/2$), décrire le mouvement des plans équiphases et en déduire la direction et le module de la vitesse de phase $\vec{v}_\varphi$.
11. Calculer la vitesse de groupe de ces ondes définie par $\vec{v}_g = (\frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z})$. Montrer que $\vec{v}_g \cdot \vec{v}_\varphi = 0$ et que $\vec{v}_g + \vec{v}_\varphi$ a une direction particulière que l'on précisera.

12. Que vaut $\vec{v}_g$ lorsque $\omega \rightarrow 2\pi N$? Que se passe-t-il alors? Représenter la structure spatiale originale des vecteurs $\vec{k}$, $\vec{u}$, $\vec{v}_\varphi$ et $\vec{v}_g$ si $0 < \theta < \pi/2$ puis si $\pi/2 < \theta < \pi$. En particulier que vaut l'angle β entre $\vec{v}_g$ et l'axe vertical si $0 < \theta < \pi/2$ et si $\pi/2 < \theta < \pi$? Que se passe-t-il dans le cas des très faibles pulsations ω .
13. Lorsque la pulsation ω est fixée, quelle longueur peut sélectionner la longueur d'onde et la largeur du paquet d'onde?
14. Quels mécanismes peuvent atténuer les ondes internes? Que va-t-il alors se passer pour l'amplitude des ondes et la taille du paquet d'onde?
15. Le cylindre horizontal oscille maintenant verticalement et périodiquement mais de façon non-sinusoïdale. Si la fréquence fondamentale correspond au un tiers de la fréquence N , déterminer les différents modes excités ainsi que les directions des vitesses de groupe, des vitesses de phase, et le rapport de ces deux vitesses pour tous les modes excités.
16. On suppose maintenant que le gradient de densité varie en z et présente un minimum. Que se passe-t-il pour $N(z)$? En déduire l'évolution de la direction de propagations des ondes. Que peut-on en déduire pour les ondes émises dans cette zone particulière?
17. Dans le cas de l'atmosphère, laquelle des hypothèses précédentes n'est plus satisfaites? Pourtant des ondes internes sont aussi mesurées. Pouvez-vous expliquer qualitativement pourquoi?

Chapitre 7

Autres exercices

7.1 Propagation du son

On se propose d'étudier les petites vibrations isentropiques d'un liquide parfait compressible dont on connaît l'équation d'état sous la forme $P = P_{eq}(\rho, S)$. On considère donc une perturbation du fluide initialement au repos (vitesse nulle, densité ρ_0 et pression P_0) et on écrit les champs de pression et de densité sous la forme :

$$P(\vec{r}, t) = P_0 + p(\vec{r}, t) \quad \rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \rho'(\vec{r}, t) \quad (7.1)$$

avec $|p(\vec{r}, t)| \ll P_0$ et $|\rho'(\vec{r}, t)| \ll \rho_0$. On considèrera de même que la vitesse $\vec{u}(\vec{r}, t)$ est "petite" (on précisera ensuite par rapport à quoi).

1. Ecrire l'équation de Navier–Stokes et l'équation de continuité au premier ordre dans les petits paramètres. Montrer que l'on arrive à un système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -c^2 \vec{\nabla} \rho' , \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 , \end{cases} \quad (7.2)$$

où l'on explicitera la constante c en fonction de l'équation d'état.

2. En déduire l'équation vérifiée par $\rho'(\vec{r}, t)$. Montrer qu'à une dimension les solutions sont de la forme $\rho'(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$. Commentez. Peut-on maintenant donner une signification physique à la constante c ?
3. On cherche des solutions sous la forme d'ondes planes monochromatiques :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{U}} \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad \rho'(\vec{r}, t) = \mathcal{R} \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) . \quad (7.3)$$

Montrer qu'on n'a pas propagation si $\vec{\mathcal{U}} \perp \vec{k}$ (ondes transverses). Si $\vec{\mathcal{U}} \parallel \vec{k}$ l'onde est longitudinale ; écrire sa relation de dispersion (relation entre ω et $k = |\vec{k}|$). Apporter des précisions sur l'hypothèse de "petite vitesse". Expliquer alors dans quelle limite un fluide peut être considéré comme incompressible.

7.2 Ondes acoustiques

Considérons un écoulement parfait (sauf mention contraire) compressible dans lequel se propage une onde de pression et de vitesse, d'amplitude faible. On note la pression $p(\vec{r}, t) = p_o + \epsilon p_1(\vec{r}, t)$ (avec $\epsilon \ll 1$), la vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{v}_1(\vec{r}, t)$, la masse volumique $\rho(\vec{r}, t) = \rho_o + \epsilon \rho_1(\vec{r}, t)$, et $\chi_S = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} |_S$. On négligera tout effet de la gravité.

1. Ecrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour un fluide compressible, si les effets visqueux ne sont pas négligeables. Que devient cette équation si le fluide est parfait ?
On se placera dans le cas du fluide parfait et irrotationnel dans la suite.
2. Ecrire l'équation de conservation de la masse.
3. Que vaut $\frac{Ds}{Dt}$ où s est l'entropie massique ? En déduire une relation liant p et ρ .
4. Linéariser les équations précédentes. En déduire l'équation vérifiée par p_1 et l'équation vérifiée par $\vec{v}_1$.
5. Donner la relation de dispersion des ondes sonores et la commenter.
6. Que vaut la vitesse du son c_0 pour un gaz parfait diatomique à température ambiante ? Evaluer la vitesse du son dans l'air sec à 20 °C. Comment varie la vitesse du son avec la température ?
7. Dans cette question, nous discutons l'utilisation de χ_S (plutôt que χ_T par exemple). En utilisant un argument d'analyse dimensionnelle, déterminer à quelle condition les transferts thermiques entre particules de fluides sont négligeables pour une onde sonore. Cette approximation est-elle mieux vérifiée à haute ou basse fréquence ? Application numérique pour l'eau et l'air sec. Conclusion.

Données : vitesse du son dans l'eau $c_{eau} = 1480$ m/s, diffusivité thermique de l'eau $\kappa_{eau} = 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, diffusivité thermique de l'air $\kappa_{air} = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ (à température et pression ambiante).

8. Dans cette question, nous discutons les conditions dans lesquelles un écoulement ouvert peut être considéré comme incompressible. Que vaut la variation typique de pression dans un écoulement stationnaire à haut nombre de Reynolds ? On notera U la vitesse typique du fluide. A quelle condition sur U peut-on considérer l'écoulement comme incompressible ?

La variation typique de pression pour un écoulement stationnaire à bas nombre de Reynolds vaut $\eta U/L$, où η est la viscosité dynamique du fluide et L une longueur typique de l'écoulement. A quelle condition sur U peut-on considérer un écoulement stationnaire à bas nombre de Reynolds comme incompressible ?

On considère un écoulement instationnaire de temps caractéristique T . Quelle condition supplémentaire est nécessaire pour considérer que l'écoulement est incompressible ?

9. **Densité d'énergie acoustique e .**

Montrer que :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div}(\vec{I}) = 0 \quad (7.4)$$

où

$$e = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_0 c_0^2} p_1^2 + \rho_0 v_1^2 \right) \quad (7.5)$$

et

$$\vec{I} = p_1 \vec{v}_1 \quad (7.6)$$

Donner la signification physique de $\vec{I}$ et des deux termes de e .

10. Pour une onde plane progressive monochromatique (OPPM), montrer que les deux termes de e moyennés sur une période sont égaux. Montrer que $\langle I \rangle = c_o \langle e \rangle$, où $\langle . \rangle$ est la moyenne sur une période.
11. Pour une fréquence de 1000 Hz, le seuil de l'audition humaine correspond à $I = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$, et le seuil de douleur à $I = 1 \text{ W m}^{-2}$. Déterminer la surpression maximale et l'amplitude du mouvement des particules de fluides correspondant à ces deux valeurs de I . Conclusion sur la performance de l'oreille et sur la validité de l'approximation linéaire

7.3 Equation d'onde dans une colonne cylindrique d'air

Une colonne d'air de masse volumique ρ_0 et de pression p_0 à l'équilibre statique est contenue dans un long tube cylindrique de section uniforme S . On suppose que les petites variations des grandeurs physiques par rapport aux valeurs d'équilibre se font à température ambiante et qu'on peut négliger la viscosité. Lorsque la colonne d'air vibre, la masse volumique et la pression de l'air à l'abscisse x et au temps t sont $\rho(x, t) = \rho_0 + \rho_1(x, t)$ et $p(x, t) = p_0 + p_1(x, t)$ et le déplacement de la section en x est $\xi_1(x, t)$.

1. Ecrire la relation de conservation de la masse sur le volume initial Sdx . En déduire la relation suivante :

$$\rho_1/\rho_0 = -\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \quad (7.7)$$

2. On définit le module d'élasticité volumique K par la relation :

$$K = \rho \left(\frac{dp}{d\rho} \right) \quad (7.8)$$

Etablir la relation entre K , ρ_0 , ρ_1 , γ et p_0 .

3. Ecrire l'équation du mouvement appliquée à la masse initialement comprise entre la section d'abscisse x et $x + dx$ et montrer qu'on obtient l'équation de propagation unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi_1(x, t) - \frac{K}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi_1(x, t) = 0 \quad (7.9)$$

Avec quelle vitesse l'onde se propage-t-elle dans le milieu ?

7.4 Lévitac on acoustique

Nous considérons un écoulement parfait compressible dans lequel se propage une onde de pression et de vitesse d'amplitude faible. On note la pression

$$p(\vec{r}, t) = p_0 + \varepsilon p_1(\vec{r}, t) + \varepsilon^2 p_2(\vec{r}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

la vitesse

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \varepsilon \vec{v}_1(\vec{r}, t) + \varepsilon^2 \vec{v}_2(\vec{r}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

la masse volumique

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \varepsilon \rho_1(\vec{r}, t) + \varepsilon^2 \rho_2(\vec{r}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

$e(\vec{r}, t)$ l'énergie interne massique, et $\chi_S(\vec{r}, t) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} |_S$. On négligera tout effet de la gravité.

1. Écrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Écrire l'équation de conservation de la masse.
2. Établir l'équation vérifiée par l'énergie interne e .
3. Exprimer $\frac{De}{Dt}$ en fonction de $\frac{Ds}{Dt}$ et $\frac{D\rho}{Dt}$, où s est l'entropie massique. Que vaut $\frac{Ds}{Dt}$? Quelle est la signification physique de cette équation?
4. Justifier que l'on peut considérer que l'écoulement est irrotationnel.
5. Linéariser les équations précédentes. En déduire l'équation vérifiée par p_1 et l'équation vérifiée par $\vec{v}_1$.
6. Donner la relation de dispersion des ondes sonores et la commenter.
7. Que vaut la vitesse du son c_0 pour un gaz parfait diatomique à température ambiante? Évaluer la vitesse du son dans l'air sec à 20°C. Comment varie la vitesse du son avec la température?
8. Dans cette question, nous discutons l'utilisation de χ_S (plutôt que χ_T par exemple). En utilisant un argument d'analyse dimensionnelle, déterminer à quelle condition les transferts thermiques entre particules de fluides sont négligeables pour une onde sonore. Cette approximation est-elle mieux vérifiée à haute ou basse fréquence? Application numérique pour l'eau et l'air sec. Conclusion.

Données : vitesse du son dans l'eau $c_{\text{eau}} = 1480$ m/s, diffusivité thermique de l'eau $\kappa_{\text{eau}} = 10^{-7}$ m²/s, diffusivité thermique de l'air $\kappa_{\text{air}} = 2 \times 10^{-5}$ m²/s (à température et pression ambiante).

9. Dans cette question, nous discutons les conditions dans lesquelles un écoulement ouvert peut être considéré comme incompressible. Que vaut la variation typique de pression dans un écoulement stationnaire à haut nombre de Reynolds? On notera U la vitesse typique du fluide. À quelle condition sur U peut-on considérer l'écoulement comme incompressible?

La variation typique de pression pour un écoulement stationnaire à bas nombre de Reynolds vaut $\eta U/L$, où η est la viscosité dynamique du fluide et L une longueur typique de l'écoulement. À quelle condition sur U peut-on considérer un écoulement stationnaire à bas nombre de Reynolds comme incompressible?

On considère un écoulement instationnaire de temps caractéristique T . Quelle condition supplémentaire est nécessaire pour considérer que l'écoulement est incompressible?

7.4.1 Énergie acoustique

10. Les questions suivantes visent à établir le bilan d'énergie associé à l'onde.

Montrer tout d'abord, sans linéariser les équations de l'écoulement parfait, que :

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) + \text{div} (p \vec{v}) = 0 \quad (7.10)$$

11. On pose $p = p_0 + \tilde{p}$. Montrer :

$$\frac{\tilde{p}}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + \operatorname{div} (\tilde{p} \vec{v}) = 0 \quad (7.11)$$

12. En déduire en linéarisant l'équation précédente que :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} (\vec{I}) = 0 \quad (7.12)$$

où

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_0 c_0^2} p_1^2 + \rho_0 v_1^2 \right) \quad (7.13)$$

$$\vec{I} = p_1 \vec{v}_1 \quad (7.14)$$

Donner la signification physique de $\vec{I}$ et des deux termes de W .

13. Pour une onde plane harmonique, montrer que les deux termes de W moyennés sur une période sont égaux. Montrer que $\langle I \rangle = c_0 W$, où $\langle I \rangle$ est la moyenne de I sur une période.
14. Pour une fréquence de 1 000 Hz, le seuil de l'audition humaine correspond à $I = 10^{-12} \text{ W/m}^2$, et le seuil de douleur à $I = 1 \text{ W/m}^2$. Déterminer la surpression maximale et l'amplitude du mouvement des particules de fluides correspondant à ces deux valeurs de I . Conclusion sur la performance de l'oreille et sur la validité de l'approximation linéaire.

7.4.2 Impédance acoustique

15. Les questions suivantes visent à déterminer le comportement d'une onde acoustique à l'interface entre deux milieux.
On considère une onde plane harmonique. On appelle impédance (complexe) d'un milieu le rapport $Z = p_1/v_1$ (où p_1 et v_1 sont a priori complexes). Déterminer Z en fonction des caractéristiques du milieu. Application numérique pour l'air et l'eau.
16. On considère une onde plane harmonique de vecteur d'onde $\vec{k}$ perpendiculaire à l'interface entre deux milieux 1 et 2. Quelles sont les conditions aux limites pour p_1 et $\vec{v}_1$ à l'interface ?
17. Que valent les coefficients de réflexion r et de transmission t pour la surpression ? Que valent les coefficients de réflexion R et de transmission T relatifs à I ? Quelle relation lie R et T ? Pourquoi ? Dans quelles autres domaines de la physique rencontre-t-on des relations similaires ?
18. Expliquer l'utilisation d'un gel entre l'émetteur et la peau lors d'une échographie.

7.4.3 Lévitacation acoustique

La pression de radiation acoustique est un phénomène non-linéaire qui apparaît lorsque l'amplitude de l'onde devient suffisamment importante. Un des effets les plus spectaculaires de la pression de radiation est la possibilité de faire léviter des objets sous l'effet d'une onde acoustique.

19. Ecrire les équations pour les variables de pression, de vitesse et de densité à l'ordre 2.

20. En faisant l'hypothèse d'un comportement harmonique des quantités obtenues à l'ordre 1, et en moyennant sur une période les équations obtenues à la question précédente, donner une expression de la pression moyenne $\langle p_2 \rangle$ à l'ordre 2.
21. En faisant l'hypothèse que l'objet reste immobile durant la lévitation, en déduire l'expression de la force de pression radiative qui s'applique sur un objet circulaire de section S .
22. On utilise un transducteur acoustique circulaire de rayon $r = 10$ cm et d'une puissance $P = 30$ W afin de faire léviter un objet circulaire de même rayon (voir la figure 7.1). Estimer la masse maximale de l'objet qu'il est possible de faire léviter.

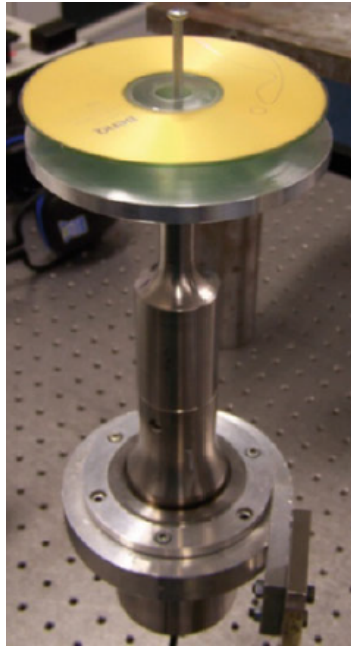


FIGURE 7.1 – Lévitation d'un compact disc au dessus d'un transducteur ultra-sonique. La vis centrale (fixée sur le transducteur) ne sert qu'à centrer le système. *Source : Su Zhao, Jorg Wallaschek. Archive of Applied Mechanics. Feb. 2011, Volume 81, Issue 2, pp 123-139. 'A standing wave acoustic levitation system for large planar objects'*

7.5 Champ de vitesse sous une onde plane à la surface d'un liquide

On donne le potentiel de vitesse $\Phi(x, z)$ sous une onde plane d'équation $\zeta = A \cos \varphi$, avec $\varphi = kx - \omega t$:

$$\Phi(x, z) = -i \frac{\omega}{k} A \exp(kz) \exp i(kx - \omega t) \quad (7.15)$$

1. Calculer le champ de vitesse $\vec{v} = (u, v)$ correspondant à ce potentiel.
2. Dessiner, sous une vague et à un instant donné, le profil de vitesse $\vec{v}(z)$ pour différents x correspondant aux phases $\varphi = 0, \pi/2, \pi$ et $3\pi/2$.

3. On cherche, sans calcul, à trouver le champ de vitesse dans l'air. Quelle est la symétrie qui permute l'air et l'eau tout en préservant la direction de propagation de l'onde et la phase de l'onde ? Dessiner alors le champ de vitesse dans l'air.
4. Est-ce qu'il y a continuité de la vitesse normale à l'interface ? De la vitesse tangentielle ? Est-ce qu'il y a continuité des gradients de vitesse ? Est-ce en contradiction avec les hypothèses généralement faites pour que ce potentiel soit solution du problème physique ?
5. On considère maintenant que le liquide possède une viscosité, faible mais non nulle, tout en considérant que l'air reste un fluide parfait et donc que la surface est une surface libre. Montrer qu'il existe alors forcément une couche limite à la surface. Décrire l'allure de cette couche limite. Par analyse dimensionnelle, estimer l'épaisseur de cette couche limite. Existe-t-il une similitude avec un autre cas classique de couche limite instationnaire ?

7.6 Oscillations dans un fluide visqueux

On considère un fluide visqueux incompressible en contact avec une plaque plane illimitée animée, dans son plan, d'un mouvement oscillatoire. On demande d'étudier le mouvement induit dans le fluide en présence d'un champ de gravité vertical, perpendiculaire à la plaque.

I : Milieu semi-infini

Le fluide occupe le demi-espace $z > 0$. Le plan solide horizontal xOy est animé d'un mouvement parallèle à l'axe Ox , avec une vitesse algébrique $U_0 \cos \omega t$. On cherchera une solution de la forme $\vec{u} = (u(z, t), 0, 0)$ (et $P = P(z)$), avec $u(z, t) = \Re \{ u_0(z) \exp^{-i\omega t} \}$; $u_0(z)$ est une amplitude complexe.

1. Vérifier que l'équation de conservation de la masse est satisfaite. (Déterminer à une constante additive près, la fonction $P(z)$.)
2. Ecrire l'équation différentielle satisfaite par $u_0(z)$. La résoudre avec les conditions aux limites $u_0(0) = U_0$ et $u_0(\infty) = 0$. On pourra poser $k^2 = i\omega/\nu$ et $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$. Quelle est la signification physique du paramètre δ ? Estimer sa valeur numérique pour une fréquence de 100 Hz, dans une huile de viscosité cinématique $\nu = 10^{-1} \text{ m}^2/\text{s}$. Voyez-vous une analogie entre le problème considéré ici et un phénomène concernant un courant électrique de haute fréquence dans un milieu conducteur ?
3. Déterminer la force visqueuse $\vec{f}(t)$ par unité d'aire que la plaque mobile exerce sur le fluide. Déterminer également la puissance moyenne par unité d'aire fournie par la plaque au fluide.
4. Montrer que la puissance dissipée par les forces de viscosité dans un élément de volume V s'écrit, dans le cas présent :

$$\mathcal{P} = \rho\nu \int_V \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dv.$$

En déduire la puissance moyenne par unité d'aire dissipée dans le fluide par les forces de viscosité. Conclusion ?

II : Epaisseur finie

On suppose maintenant que le fluide occupe seulement une hauteur h au-dessus du plan xOy . La surface libre, sur laquelle ne s'exerce aucune force, demeure plane et constitue le plan $z = h$. La vitesse de la plaque xOy est encore $U_0 \cos \omega t$, selon l'axe Ox .

1. Quelles sont les conditions aux limites en $z = 0$ et $z = h$? Déterminer l'amplitude complexe $u_0(z)$. Déterminer l'amplitude complexe f_0 de la force par unité d'aire que la plaque exerce sur le fluide.
2. Dans le cas limite $h \rightarrow \infty$ donner l'expression de la force réelle $f(t)$ correspondante et vérifier que l'on retrouve le résultat de la partie précédente. Lorsque $h \ll \delta$, donner l'expression explicite de la force réelle $f(t)$ et expliquer la signification physique du résultat. Quelle peut-être l'application d'un tel montage?

7.7 Ondes capillaires dans un fluide visqueux

On cherche à établir la relation de dispersion des ondes capillaires à l'interface eau liquide - air en tenant compte de la viscosité de l'eau. On appelle ρ la masse volumique de l'eau, η sa viscosité dynamique, γ la tension de surface eau-air. La direction verticale vers le haut est notée z , l'eau se trouve en $z \leq 0$ en l'absence d'onde. L'interface est notée $\xi(x, t)$. L'écoulement dans l'eau est supposé incompressible. La pression dans l'air est uniforme et vaut p_0 .

Dans les premières questions, il n'est pas nécessaire de prendre en compte la viscosité de l'eau.

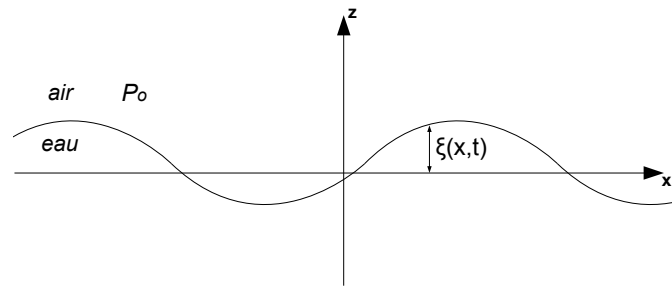


FIGURE 7.2 – Ondes à la surface d'un fluide

1. Dans tout ce problème, on néglige l'effet de la gravité. Pour quelles longueurs d'onde λ cette approximation est-elle valable? On donnera un ordre de grandeur de la valeur limite dans le cas de l'eau (à température et pression ordinaires).
2. Dans tout ce problème, on fera l'hypothèse d'ondes en eaux profondes. Que signifie ce terme?
3. En l'absence de viscosité, retrouver par analyse dimensionnelle la relation de dispersion des ondes capillaires en eau profonde.

Dans toutes les questions suivantes, on prendra en compte le caractère visqueux de l'eau.

4. Par analyse dimensionnelle, donner l'ordre de grandeur du temps d'amortissement d'une onde de vecteur d'onde k , lorsque l'amortissement est lié à la viscosité.
5. Énoncer l'équation traduisant l'incompressibilité de l'eau.
6. Énoncer l'équation de Navier-Stokes.
7. À quelle condition sur l'amplitude des ondes peut-on négliger le terme non-linéaire devant le terme instationnaire? On se placera dans cette limite dans toute la suite du problème.
8. Énoncer la condition aux limites pour la vitesse pour $z \rightarrow -\infty$.

9. Énoncer la condition aux limites cinématique à la surface libre, c'est-à-dire le lien entre $\xi(x, t)$ et la vitesse $\vec{v}(x, \xi(x, t), t)$ liée au fait que les particules de fluide situées à la surface y restent.
10. Linéariser l'équation précédente.
11. La condition aux limites liée à la contrainte normale, après linéarisation, s'écrit :

$$-p(x, 0, t) + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}(x, 0, t) - \gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x, 0, t) + p_0 = 0 \quad (7.16)$$

À quoi correspond le terme $-\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$?

12. Écrire la condition aux limites à la surface liée à la contrainte tangentielle.

On cherche une solution pour laquelle :

$$v_x(x, z, t) = -ie^{-ikx+St/\tau} (Ae^{kz} + Be^{mz}) \quad (7.17)$$

où les relations entre k, m, S, A, B seront établies dans la suite du problème, et où $\tau = \rho/(2\eta k^2)$. A, B, m et S sont des nombres complexes, et k réel.

12. Donner la signification physique de τ et des parties réelles et imaginaires de S .
13. À l'aide de l'équation d'incompressibilité, exprimer $v_z(x, z, t)$. On choisira la solution de moyenne temporelle nulle.
14. Quelle condition permet de justifier que k et la partie réelle de m sont positives ?
15. À l'aide de la condition aux limites cinématique à la surface libre, montrer que :

$$\xi(x, t) = e^{-ikx+St/\tau} \frac{\tau}{S} \left(A + \frac{k}{m} B \right) \quad (7.18)$$

16. Calculer $\vec{\text{rot}}(\vec{v})$ en fonction de B , en utilisant les expressions de v_x et v_z .
17. Dédire de l'équation de Navier-Stokes l'équation vérifiée par $\vec{\text{rot}}(\vec{v})$. En déduire $m^2 = k^2(1 + 2S)$. On écrira aussi cette égalité $m = k\sqrt{1 + 2S}$, où $\sqrt{}$ désigne la racine dont la partie réelle est positive.

Attention, il est conseillé d'aborder les questions suivantes uniquement si le reste du devoir est terminé.

18. À l'aide des questions précédentes et de l'équation de Navier-Stokes selon z , montrer que :

$$p(x, z, t) = p_0 - \frac{S\rho}{k\tau} A e^{-ikx+St/\tau+kz} \quad (7.19)$$

19. Dédire une relation entre A et B en utilisant la condition aux limites à la surface liée à la contrainte tangentielle.
20. Dédire une autre relation entre A et B en utilisant la condition aux limites à la surface liée à la contrainte normale.
21. On pose $R = (\gamma\rho)/(4\eta^2 k)$. Quelle est la dimension de γ/η ? Quelle est la signification physique de R ?

22. Montrer que la relation de dispersion s'écrit :

$$R + (S + 1)^2 - \sqrt{1 + 2S} = 0 \quad (7.20)$$

où $\sqrt{}$ désigne la racine dont la partie réelle est positive et où la partie réelle de S est négative.

23. Calculer S en fonction de R dans le cas $R \rightarrow +\infty$. On pourra poser $R = 1/\varepsilon$ et $S = \alpha/\sqrt{\varepsilon} + \beta + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$.

24. Que vaut la relation entre la pulsation et le nombre d'onde k dans le cas précédent ? Commenter.

Annexe : analyse vectorielle

$$\Delta(\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla \wedge (\Delta \mathbf{A})$$

7.8 Ondes sous une plaque mince flottant sur un liquide

D'après Landau et Lifchitz, Elasticité, Problème 10, p. 118.

On s'intéresse à la relation de dispersion d'ondes se propageant sous une couche élastique mince de longueur et largeur infinies et d'épaisseur h , posée sur de l'eau considérée comme un fluide parfait de profondeur infinie (figure 7.3). On négligera l'effet de l'air au-dessus du film et on considérera que le film est en contact permanent avec l'eau. On note ρ_f et ρ_p les masses volumiques respectives du fluide et de la plaque. On étudiera la propagation d'une onde plane « de surface » de petite amplitude se propageant sur la plaque initialement dont la surface inférieure est positionnée en $z = 0$. On écrit alors la position verticale du film sous la forme $\xi = \xi_0 e^{i(kx - \omega t)}$.

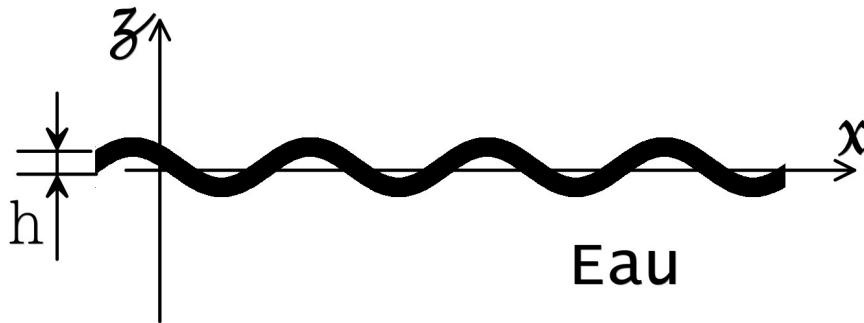


FIGURE 7.3 – Schéma des ondes se propageant sous une plaque élastique flottant à la surface de l'eau.

7.8.1 Description des ondes dans le liquide

La propagation de l'onde entraîne un mouvement incompressible du fluide que l'on supposera irrotationnel.

1. Donner l'équation que doit satisfaire le potentiel de vitesse Φ .

2. On cherche des solutions sous la forme : $\Phi(x, z, t) = \Phi_0 f(z) \exp[i(kx - \omega t)]$. A quelle condition sur ξ_0 peut-on négliger les termes non-linéaires de ce problème dans l'équation d'Euler ? On pourra comparer l'ordre de grandeur du terme instationnaire à l'ordre de grandeur du terme non-linéaire.
3. Déterminer la fonction $f(z)$. On utilisera une condition sur la vitesse à grande profondeur.
4. Montrer que la pression dans le fluide est donnée par : $p = -\rho_f \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho_f g z + C$ ou C est une constante que l'on déterminera.
5. À partir de la condition à la limite cinématique, montrer que $\Phi_0 = -i \frac{\omega}{k} \xi_0$.

7.8.2 Description du mouvement de la plaque

Une plaque élastique courbée est soumise à une contrainte normale d'origine élastique $\sigma_{zz} = -B \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4}$.

6. Faire un schéma d'un élément de plaque déformé en indiquant toutes les forces en présence. Quel est le signe de la constante B ?
7. Ecrire le principe fondamental de la dynamique pour un élément de plaque d'épaisseur h en fonction des variables ξ, x, t, B, h, ρ_p et g .
8. À partir de la condition à la limite dynamique, montrer que la relation de dispersion des ondes peut s'écrire : $(\rho_p h k + \rho_f) \omega^2 = B k^5 + \rho_f g k$.
9. Simplifier cette relation de dispersion pour des ondes de grande longueur d'onde devant l'épaisseur de la plaque puisque l'on a supposé la plaque mince. Tracer alors l'allure de la relation de dispersion, et en déduire la longueur d'onde de coupure λ_c pour laquelle la correction élastique devient importante. Montrer que dans la limite des grandes longueurs d'ondes on retrouve une relation de dispersion simple.
10. Cette étude peut s'appliquer à la propagation des vagues sous la banquise. Le coefficient d'élasticité de la glace pour une couche d'épaisseur $h = 2m$ vaut $B = 2.7 \cdot 10^9 N.m$. Calculer numériquement λ_c .
11. Finalement, la présence de la plaque augmente-t-elle ou diminue-t-elle la longueur d'onde et/ou la vitesse de phase d'une onde de pulsation ω ?

7.9 Dérive de Stokes - Version 2

On considère l'écoulement donné par l'expression :

$$\vec{v} = (v_0 e^{kz} \sin(\omega t - kx), 0, v_0 e^{kz} \cos(\omega t - kx)).$$

Ce champ de vitesse, défini pour $z \leq 0$ uniquement, est associé à une onde de surface se déplaçant selon l'axe Ox dans un bassin de grande profondeur. L'interface se trouve à peu près à $z = 0$.

1. Montrer que l'onde considérée est une onde progressive. L'écoulement est-il incompressible ? irrotationnel ? Déterminer et tracer les lignes de courant.
2. On considère que l'amplitude (dimensionnée) A des ondes est faible. L'amplitude adimensionnée, appelée cambrure, est notée ε . Proposer une expression pertinente de ε en fonction de A et d'une autre grandeur physique du problème.
Par rapport à quelle quantité v_0 est-elle petite ? Écrire v_0 en fonction notamment de ε .

3. Calculer et tracer les trajectoires des particules à l'ordre le plus bas.
4. En fait, il existe un mouvement de transport de matière associé à la propagation de l'onde, appelé dérive de Stokes. Ce phénomène joue un rôle important dans les océans, notamment dans le transport de matière à leur surface (voir par exemple *Stokes drift for inertial particles transported by water waves*, F. Santamaria et al., EPL, 102 (2013)). Déterminer l'expression de la vitesse moyenne horizontale, au premier ordre non-nul, d'une particule de fluide.

7.10 "Shoaling" de la houle sur une remontée lente des fonds

On s'intéresse à la propagation des ondes de gravité à la surface de la mer. On supposera une houle irrotationnelle et monochromatique de pulsation ω , de nombre d'onde k et d'amplitude A supposée faible.

Rappel : $\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi$.

7.10.1 Cas des ondes en eau profonde

On supposera que l'onde se propage dans la direction de l'axe Ox et on écrit $\zeta = A \cos(kx - \omega t)$ la forme de la surface libre. Le potentiel dont dérive la vitesse s'écrit alors $\phi = \frac{\omega}{k} A \sin(kx - \omega t) \exp(kz)$, où l'axe Oz est dirigé vers le haut et où $z = 0$ correspond à la surface au repos.

On rappelle la relation de dispersion des ondes en eau profonde $\omega^2 = gk$.

1. Calculer les composantes et le module du champ de vitesse $\vec{v}(x, z, t)$ et en déduire l'énergie cinétique par unité de masse $e_c(x, z, t)$. Le résultat dépend-t-il du temps ? Pourquoi ?
2. Calculer l'énergie cinétique E_c contenue dans une longueur d'onde et dans une largeur transverse L .
3. Exprimer maintenant l'énergie potentielle de gravité par unité de masse $e_p(z)$. En intégrant de $z = 0$ à la surface $\zeta(x, t)$ montrer que l'énergie potentielle dans une longueur d'onde et dans une largeur L s'écrit :

$$E_p = \frac{1}{4} \rho A^2 g \lambda L.$$

4. Comparer E_c et E_p . Comparer avec le cas d'un oscillateur harmonique. En déduire l'énergie totale par longueur d'onde transportée par l'onde.

7.10.2 Cas des ondes en eau peu profonde

On suppose que l'onde précédente arrive maintenant dans des zones de moindre profondeur.

On rappelle la relation de dispersion des ondes de gravité dans un fluide de profondeur h : $\omega^2 = gk \tanh(kh)$.

5. Donner la relation de dispersion des ondes en eau très peu profonde. A partir de quelle valeur du rapport λ/h peut-on raisonnablement dire que l'onde se propage en eau très peu profonde ?
6. Sachant que la pulsation de l'onde se conserve, montrer que la longueur d'onde diminue lorsque h diminue. En particulier montrer que si on appelle λ_∞ la longueur d'onde en eau profonde, on a dans la limite des eaux très peu profondes la relation : $\lambda(h) = \sqrt{2\pi h \lambda_\infty}$.
7. A partir de la conservation de l'énergie par longueur d'onde transportée par l'onde, trouver la relation qui relie en eau très peu profonde $A(h)$ à h , λ_∞ et A_∞ (amplitude en eau profonde).

8. Tracer l'allure d'une telle onde lorsqu'elle arrive sur des fonds remontants doucement. Quelle condition doit satisfaire $h(x)$?

7.10.3 Application aux tsunamis

On suppose qu'un séisme crée une onde de période 20 minutes et d'amplitude 30 cm dans des eaux de 2000 mètres de profondeur.

9. Calculer la longueur d'onde λ de cette onde. Est-on bien dans un cas de propagation en eau très peu profonde ?
10. Calculer l'amplitude et la longueur d'onde lorsque les fonds sont de 200 mètres, 20 mètres et 2 mètres.
11. En supposant que l'approximation linéaire qui nous a conduit à la relation de dispersion de ces ondes reste valable si $A/h < 0,1$, jusqu'à quelle profondeur peut-on faire confiance aux résultats ? Que se passe-t-il après ?

Le Tsunami du 26 décembre 2004

La figure 7.4 reproduit des simulations numériques du tsunami du 26 décembre 2004, provoqué par un séisme au large de l'île de Sumatra.

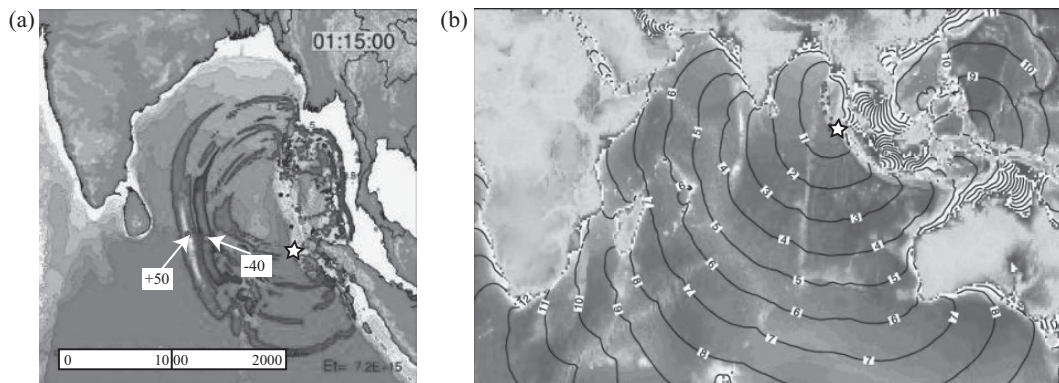


FIGURE 7.4 – Simulations numériques de la houle se propageant à la suite du séisme (★) du 26 décembre 2004 dans l'Océan Indien. (a) Amplitude de la houle, 1 h 15 après le séisme. Echelle en km, amplitude en cm (Univ. California). (b) Position du front avant de la perturbation à intervalles de 1 h (Geological Survey of Japan, AIST).

12. A partir de ces images, estimez la longueur d'onde caractéristique λ , ainsi que la vitesse de propagation de l'onde. En déduire la profondeur moyenne h de l'Océan Indien dans cette région. Est-on bien dans un cas de propagation en eau très peu profonde ?
13. En pleine mer, l'ordre de grandeur de l'amplitude A est de 50 cm. Calculer l'amplitude et la longueur d'onde du tsunami lorsque celui-ci s'approche des côtes, pour des profondeurs de 500 mètres, 50 mètres et 5 mètres.
14. En supposant que l'approximation linéaire qui nous a conduit à la relation de dispersion de ces ondes reste valable si $A/h < 0,1$, jusqu'à quelle profondeur peut-on faire confiance aux résultats ? Que se passe-t-il après ?