

FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY



### Master 2 Dynamique des Fluides et Energétique

.....

#### INSTABILITÉS HYDRODYNAMIQUES

.....

#### Notes de cours 2020/2021

(Version du 3 septembre 2020)

#### Marc Rabaud

marc.rabaud@universite-paris-saclay.fr, laboratoire FAST, bât. 530, 91405 Orsay cedex.



Instabilité en forme de soliton générée par un vent soufflant à la surface d'une huile visqueuse (thèse M. Aulnette, 2020).

# Table des matières

	0.1	Introduction	5						
	0.2	Pour en savoir plus	5						
1	Que	Quelques instabilités mécaniques							
	1.1	L'instabilité d'une bille dans un anneau tournant	7						
	1.2	L'instabilité de l'anneau tournant au bout d'un fil	8						
	1.3	L'instabilité de flambage	8						
2	Inst	abilité de l'écoulement de Poiseuille en tube	9						
3	Inst	abilités gravitaires : l'instabilité de Rayleigh-Taylor	11						
4	Inst	Instabilités centrifuges : l'instabilité de Taylor-Couette							
	4.1	Instabilité de Taylor-Couette	15						
		4.1.1 Ecoulement de Couette	16						
		4.1.2 Critère inviscide de Rayleigh	16						
	4.2	Instabilité de Görtler et instabilité de Dean	17						
5	Inst	Instabilités de cisaillement : l'instabilité de Kelvin-Helmholtz							
	5.1	Description physique	20						
	5.2	Equation de Rayleigh pour un profil continu de vitesse	21						
	5.3	Equation de Orr-Sommerfeld pour un profil continu de vitesse	21						
	5.4	Analyse de stabilité pour un profil de vitesse discontinu	22						
	5.5	Cas d'un profil de vitesse continu	24						
	5.6	Cas du vent sur la mer	24						
	5.7	Analyse spatiale de stabilité	24						
6	Inst	abilité paramétrique : l'instabilité de Faraday	25						
	6.1	Introduction	25						
	6.2	Analyse des perturbations	25						
	6.3	Equation de Mathieu (1868)	27						
	6.4	Effet de la dissipation	28						
7	Inst	abilités visqueuses : l'instabilité de Saffman-Taylor	31						
	7.1	Loi de Darcy	32						
	7.2	Description qualitative de l'instabilité	33						
	7.3	Analyse linéaire de l'instabilité	34						
		7.3.1 Ecoulement de base (i.e. ordre 0)	34						

#### TABLE DES MATIÈRES

		7.3.2 Ecoulement perturbé (i.e. ordre 1)	34							
	7.4	Evolution non-linéaire de l'instabilité	36							
8	Insta	nstabilités de convection thermique 39								
	8.1	Convection de Rayleigh-Bénard	39							
	8.2	Instabilité de Bénard-Marangoni	40							
9	Compléments théoriques 4									
	9.1	Bifurcations supercritiques et bifurcations sous-critiques	41							
	9.2	Théorème de Squire	43							
	9.3	Description faiblement non-linéaire en « petite boite »	43							
		9.3.1 Le cas des transitions supercritiques	43							
		9.3.2 Le cas des transitions sous-critiques	43							
		9.3.3 Bifurcation imparfaite	44							
	9.4	L'instabilité de Benjamin-Feir	44							
	9.5	L'équation de Ginsburg-Laudau complexe	44							
	9.6	Instabilité convective ou instabilité absolue?	45							
10	Autres instabilités et tableau récapitulatif									
	10.1	Quelques autres exemples d'instabilités	47							
	10.2	Tableau donnant les propriétés de quelques instabilités	48							
Bił	oliogr	aphie	50							

#### 0.1 Introduction

Le but de ce cours est de présenter le concept d'instabilité en mécanique des fluides. Comme les équations de Navier-Stokes sont non-linéaires il existe en général de multiples solutions pour l'écoulement. Les écoulements observés à faibles contraintes, par exemple à nombre de Reynolds modérés, restent solutions des équations mais ne sont plus forcement stables à plus fortes contraintes. L'écoulement évolue alors vers d'autres solutions, souvent plus complexes car ayant perdues certaines symétries spatiales et/ou temporelles.

Nous verrons dans ce cours quelques exemples d'analyse linéaire de stabilité et aussi quelques exemples de solutions non-linéaires. La consultation des articles de référence cités dans ces notes est vivement conseillée pour des étudiants de Master 2. Les PDF de ces articles sont disponibles à l'adresse http://www.fast.u-psud.fr/~rabaud/Articles\_Cours\_insta\_M2/.

Commençons par décrire quelques instabilités mécaniques avant de décrire les instabilités les plus classiques de l'hydrodynamique.

#### 0.2 Pour en savoir plus

Une vidéo ancienne mais incontournable : *Flow instabilities*, E.L. Mollo-Christensen, National Committee for Fluid Mechanics Films, http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html (30 mn.)

Quelques livres introductifs du niveau Master 2 :

- [12] F. Charru, Instabilités hydrodynamiques, EDP Sciences, 2007.
- [25] P. Manneville, Instabilités, Chaos et Turbulence, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2004.
- [16] P.G. Drazin, Introduction to Hydrodynamic Stability, Cambridge Univ. Press, 2002.
- [8] P. Bergé, Y. Pomeau, and C. Vidal. Ordre dans le chaos. Hermann, 1998.

#### TABLE DES MATIÈRES

## Quelques instabilités mécaniques

#### 1.1 L'instabilité d'une bille dans un anneau tournant

Cette instabilité a l'avantage de permettre un calcul explicite très simple de la transition. Considérons une anneau de rayon R placé verticalement et tournant à la vitesse angulaire  $\Omega$  (figure 1.1a). L'anneau est muni d'une goulotte dans lequel une bille d'acier de masse M peut rouler sans (ou avec peu) de frottement. A basse vitesse angulaire la position stable de la bille correspond au point le plus bas. Mais au-delà d'une vitesse angulaire critique  $\Omega_c$ , la bille prend une des deux positions d'équilibre faisant un angle  $\theta(\Omega)$  avec la verticale.



FIGURE 1.1 – (a) Photographie d'un bille en équilibre dans la goulotte d'un anneau métallique tournant à la vitesse angulaire  $\Omega$  et (b) diagramme de stabilité correspondant [22].

En effet, considérons l'équilibre pour un angle  $\theta$  non nul. La somme de la force centrifuge (dans le référentiel tournant)  $M\Omega^2 R \sin \theta$ , du poids Mg et de la réaction du support est nulle. L'équilibre des forces tangentielles donne :

$$Mg\sin\theta = M\Omega^2 R\sin\theta\cos\theta. \tag{1.1}$$

Cette équation à pour première solution  $\theta = 0$  qui existe quelque soit  $\Omega$ , et comme autres solutions  $\theta = \pm \arccos\left(\frac{g}{\Omega^2 R}\right)$  qui elles n'existent que si  $\Omega \ge \Omega_c = \sqrt{g/R}$  (figure 1.1b).

Pour évaluer la stabilité de ces solutions il faut calculer l'énergie potentielle  $U_p(\theta)$  et voir si elle est minimale. En réalité il s'agit d'une pseudo-énergie car on est dans le référentiel tournant et le plus simple est de la calculer en exprimant le travail de la force tangentielle entre  $\theta = 0$  et  $\theta$ .

On trouve :

$$U_p(\theta) = MgR(1 - \cos\theta) - \frac{M}{2}\Omega^2 R^2 \sin^2\theta.$$

L'étude de stabilité (i.e. du signe de  $\partial^2 U_p / \partial \theta^2$ ) montre que la solution  $\theta = 0$  n'est plus stable (si on la perturbe) pour  $\Omega \ge \Omega_c$  et que c'est l'autre solution qui devient alors stable.

Nous pouvons écrire l'évolution de la solution au voisinage de la transition (changement de solution). Pour cela écrivons le petit paramètre  $\epsilon = \frac{\Omega - \Omega_c}{\Omega_c}$  et linéarisons l'équation d'équilibre (Eq. 1.1) au voisinage de la transition. On trouve une relation en racine carré :  $\theta_e = \pm 2\epsilon^{1/2}$ . Ce type de comportement en  $\epsilon^{1/2}$  est caractéristique d'une bifurcation supercritique (voir §9.3.1). On a une transition continue et réversible entre les solutions au voisinage du seuil (en l'absence de frottement sec). De plus les solutions bifurquées  $+\theta_e$  et  $-\theta_e$  sont totalement équivalentes. Le choix d'une des deux solutions possibles correspond toutefois à une brisure d'une des symétries du problème. Nous avons donc affaire à une instabilité supercritique au-delà du seuil  $\Omega_c$ .

#### 1.2 L'instabilité de l'anneau tournant au bout d'un fil

Cette instabilité est assez similaire à la précédente et encore plus simple à réaliser expérimentalement. Un anneau rigide de masse M et de rayon R est suspendu par son bord à une ficelle de longueur L et on le fait tourner à la vitesse angulaire  $\vec{\Omega}$ . A faible vitesse angulaire, l'anneau tourne dans un plan vertical, mais au-dessus d'un seuil, le plan de l'anneau fait un angle  $\theta$  avec la verticale. A haute vitesse l'anneau tend à tourner dans un plan horizontal. Cette instabilité a été étudié il y a quelques années par F. Moisy [26]. Elle présente des analogies avec la stabilité d'un lasso en rotation rapide [11].

#### 1.3 L'instabilité de flambage

L'instabilité de flambage apparaît lorsque qu'une poutre ou une plaque est soumise à un effort de compression suffisamment important. En encastrement simple aux deux bouts le mode le plus instable n'a qu'un maximum sur la longueur, mais dans le cas d'une plaque encastrée aussi sur les côtés plusieurs extrema sont possibles [9].

# Instabilité de l'écoulement de Poiseuille en tube

Contrairement à d'autres instabilités qui existent même pour des fluides parfaits, et où la viscosité est juste une correction sur le taux de croissance, l'instabilité de l'écoulement de Poiseuille en tube (comme d'ailleurs celle de la déstabilisation de l'écoulement de Couette plan) n'existe que parce que le fluide est visqueux. L'analyse linéaire de stabilité montre d'ailleurs que l'écoulement parabolique dans un tube cylindrique est linéairement stable pour tout nombre de Reynolds, alors que pour l'écoulement de Poiseuille entre plaques l'écoulement est linéairement stable uniquement jusqu'à  $Re_c = 5772$ . De nombreuses études analytiques, numériques et expérimentales essayent ces dernières années de caractériser les premières structures non-linéaires observées dans l'écoulement de Poiseuille. L'idée est, comme pour une bifurcation sous-critique, de partir de l'état développé et de revenir lentement vers l'état stable en diminuant le paramètre de contrôle. Expérimentalement toutefois on observe que pour un nombre de Reynolds critique qui dépend de la qualité du montage expérimental,  $Re_c \approx 2000$  pour un montage standard mais plus de 100 000 pour des montages très soigneux, l'écoulement devient brutalement turbulent. C'est donc une instabilité fortement sous-critique (très sensible au niveau de vibrations) qui est observée. Malgré le caractère mal défini du seuil de cette instabilité, c'est cet écoulement qui a permis à Osborne Reynolds de montrer en 1883 que la transition au régime turbulent dépendait du diamètre, du débit et de la viscosité, mais uniquement à travers un seul nombre sans dimension  $Re = \frac{UD}{\nu}$  qui maintenant porte son nom (figure 2.1).

Des travaux récents [4] ont montré, expérimentalement dans un tube très long (près de 4000 fois le diamètre !) et numériquement qu'une bouffée turbulente a une probabilité de survie qui décroît exponentiellement avec le temps mais que le temps caractéristique augmente très fortement (plus qu'exponentiellement) avec le nombre de Reynolds. Simultanément une bouffée turbulente a une probabilité de se diviser et de s'étendre qui croît avec le nombre de Reynolds mais avec un temps caractéristique qui décroît fortement (plus qu'exponentiellement) avec le nombre de Reynolds. Finalement il existe un nombre de Reynolds  $Re_c = 2040 \pm 10$  pour lequel les probabilités de disparition ou d'envahissement sont égales.



FIGURE 2.1 – (a) Le montage historique de Reynolds et (b) dessins démontrant que l'écoulement en tube devient instable lorsque un nombre sans dimension devient suffisamment grand. Ce nombre maintenant appelé « de Reynolds » est le nombre fondamental de la mécanique des fluides. Images issus de l'article historique d'Osborne Reynolds (1883) [30]

# **Instabilités gravitaires : l'instabilité de Rayleigh-Taylor**

Lorsque deux fluides non miscibles et peu visqueux sont placés l'un au-dessus de l'autre, et que le fluide du haut (fluide 2) est plus dense que le fluide du bas (fluide 1), l'interface qui les sépare est instable et se déforme. Dans le cas où il existe un espace infini au-dessus et au-dessous de l'interface, nous pouvons utiliser la relation de dispersion des ondes gravito-capillaires à l'interface entre deux fluides parfaits infinis pour des ondes de faibles amplitudes :

$$\omega^{2} = \frac{\rho_{1} - \rho_{2}}{\rho_{1} + \rho_{2}}gk + \frac{\gamma}{\rho_{1} + \rho_{2}}k^{3} = -\frac{\rho_{2} - \rho_{1}}{\rho_{1} + \rho_{2}}gk \left| 1 - \left(\frac{k}{k_{c}}\right)^{2} \right|.$$
(3.1)

Dans notre cas  $\rho_2 > \rho_1$  on a alors  $k_c = \sqrt{(\rho_2 - \rho_1)g/\gamma}$  pour le nombre capillaire. Cette équation relie la pulsation et le nombre d'onde de toutes ondes sinusoïdales de faible amplitude s'écrivant

$$\zeta(x,t) = \zeta_0 \, \exp i(kx - \omega t).$$

Comme le montre la figure 3.1 il n'y a pas toujours de solution réelle pour  $\omega$  à cette équation, car  $\rho_2 - \rho_1 > 0$ . Si le nombre d'onde k est plus grand qu'une valeur critique  $k_c$  qui correspond à l'inverse de la longueur capillaire,  $\omega$  sera réel et l'on aura des ondes progressives, dans une sens ou dans l'autre sur l'interface. Si par contre le nombre d'onde k est plus petit que  $k_c$ ,  $\omega$  sera un imaginaire pur. On peut alors écrire  $\omega = i\sigma$  et la forme de l'interface s'écrit alors :

$$\zeta(x,t) = \zeta_0 \, \exp \sigma t \, \exp i k x.$$

Ces ondes ne se propagent pas, elles ont une amplitude qui croît, ou décroît, exponentiellement au cours du temps selon le signe de  $\sigma$ . L'existence des deux signes possible pour  $\sigma$  vient de l'invariance temporelle des équations  $(t \rightarrow -t)$  pour un système non dissipatif.

Si  $\sigma$  est positif, l'amplitude de la déformation de l'interface croît exponentiellement avec le temps : l'interface est donc linéairement instable. Comme la partie réelle de  $\omega$  est nulle si  $k < k_c$  il n'y a pas propagation de l'onde qui croît donc sur place (voir figure 3.2).

Le mode le plus instable et qui devrait rapidement dominer est le mode qui maximise  $\sigma$ . Il correspond à  $\frac{\partial \sigma}{\partial k} = 0$  soit :

$$k_{max} = \frac{1}{\sqrt{3}} k_c.$$

Par exemple on trouve  $\lambda_{max} \approx 3$  cm pour de l'eau au-dessus de l'air.



FIGURE 3.1 – Tracé de la relation de dispersion  $\omega^2 = f(k/k_c)$  (Eq. 3.1) de l'instabilité de Rayleigh-Taylor.



FIGURE 3.2 – Simulation numérique bidimensionnelle de l'interface d'un fluide lourd placé au-dessus d'un fluide léger, quelques instants après qu'ils aient été mis en contact, mais déjà largement dans le régime non-linéaire.

Le site https://www.youtube.com/watch?v=yabqo7VFTYs montre un bel exemple de cette instabilité. On peut voir des structures similaires sous certains nuages (Mammatus clouds).

Si l'expérience est faite en retournant un tube de diamètre nettement inférieur à la longueur capillaire, fermé à une extrémité et rempli d'eau, il ne se videra pas. Pour y arriver, il suffit d'augmenter la gravité apparente en secouant le tube. La longueur capillaire devient alors plus petite que le diamètre du tube, l'instabilité peut démarrer et vide le tube. Des dispositifs basés sur ce principe servent d'indicateur de choc pour certains colis fragiles (https://www.tilt-import.eu/images/Documentation/ choc/Indicateur-de-choc-shockwatch.pdf).

La dynamique de l'instabilité de Rayleigh-Taylor sera ralentie par la viscosité des liquides, mais dans tout les cas il n'y a pas de saturation vers une autre solution, tant que le fluide lourd n'a pas remplacé le fluide léger.

L'instabilité de Rayleigh-Taylor dans la limite des couches minces de fluides visqueux a aussi été étudiée. Elle donne lieu à des pavages hexagonaux de gouttes assez facile à observer (figure 3.3). Le taux de croissance de l'instabilité se trouve alors contrôlé par la viscosité du fait de l'écoulement de lubrification dans la faible épaisseur de la couche de liquide et l'on obtient alors :

$$\sigma = \frac{e^3 g}{3\nu} k^2 \left[ 1 - (k/k_c)^2 \right],$$

où e est l'épaisseur initiale de la couche liquide [20].



FIGURE 3.3 – Photographie d'une couche d'huile étalée sur une surface plane, prise quelques minutes après que la plaque ait été retournée.

#### 14 CHAPITRE 3. INSTABILITÉS GRAVITAIRES : L'INSTABILITÉ DE RAYLEIGH-TAYLOR

# **Instabilités centrifuges : l'instabilité de Taylor-Couette**

#### 4.1 Instabilité de Taylor-Couette

Cette instabilité a beaucoup été étudiée dans les années 1980 comme un exemple de la transition progressive d'un écoulement d'un régime laminaire vers un régime turbulent.

L'instabilité de l'écoulement de base apparaît dans la géométrie de Couette circulaire lorsque le cylindre intérieur tourne avec une vitesse angulaire suffisamment élevée. Avant le seuil de l'instabilité de Taylor-Couette, l'écoulement est stationnaire, purement orthoradial (1C1D, c'est-à-dire une seule composante de la vitesse qui ne dépend que du rayon). Au-dessus d'un premier seuil en vitesse angulaire, des composantes radiale et axiale de la vitesse apparaissent et des tores de sens alternés sont observés (figure 4.1). L'instabilité est supercritique, c'est-à-dire qu'elle sature à des amplitudes aussi faibles que l'on veut juste au-dessus du seuil. Au-delà du seuil, du fait de ces rouleaux toriques, l'écoulement est maintenant 3C2D, mais l'axisymétrie et la stationnarité sont toujours réalisées. C'est au-delà d'un deuxième seuil que les anneaux commencent à onduler en  $\theta$  (perte de l'invariance par rotation) ce qui brise la dernière symétrie spatiale (écoulement est alors 3D3C) mais l'écoulement est encore stationnaire dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire des ondulations. Au-delà d'un troisième seuil une première modulation temporelle intrinsèque de l'intensité des rouleaux apparaît, brisant cette fois la symétrie de translation dans le temps du problème. Si les deux cylindres tournent simultanément le diagramme des états bifurqués est plus complexe (figure 4.2).

En 1923 Taylor [33] a calculé par analyse de stabilité linéaire et mesuré expérimentalement le premier seuil de l'instabilité dans le plan  $(Re_1, Re_2)$  où les deux nombres de Reynolds sont définis par la relation  $Re_i = \Omega_i R_i (R_2 - R_1) / \nu$  (figure 4.2a). C'était la première fois qu'un étude de stabilité permettait une si bonne confrontation entre théorie et expérience.

Dans le cas d'un faible gap  $(d = R_2 - R_1 \ll R_1)$  et du cylindre extérieur fixe, le seuil correspond à un nombre de Taylor critique donné par :

$$Ta_c = Re_1^2 \frac{d}{R_1} \approx 1708,$$

où  $Re_1 = \Omega_1 R_1 d/\nu$  est le nombre de Reynolds construit sur la vitesse angulaire et sur l'épaisseur du gap. Dans le cas où les deux cylindres tournent dans le même sens, le seuil donné par le critère de Rayleigh, correspond à une ligne dans le plan  $(Re_1, Re_2)$  (figure 4.2a). La longueur d'onde la plus instable est  $\lambda_c \approx 2(R_2 - R_1)$ . On pourra trouver l'analyse linéaire de stabilité complète de cette

#### 16 CHAPITRE 4. INSTABILITÉS CENTRIFUGES : L'INSTABILITÉ DE TAYLOR-COUETTE

instabilité dans la Ref. [17].



FIGURE 4.1 – Instabilité centrifuge de Taylor-Couette visible sous forme de tores superposés entre deux cylindres lorsque le cylindre intérieur tourne suffisamment vite : (a) Schéma issu de la référence [32] et (b) visualisation par des écailles nacrantes.

#### 4.1.1 Ecoulement de Couette

L'écoulement de base entre deux cylindres coaxiaux est supposé, stationnaire, axisymétrique et purement azimutal ( $\vec{v} = v_{\theta}(r)\vec{e}_{\theta}$ ). La projection de Navier-Stokes sur la direction orthoradiale nous conduit à l'équation  $\eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} \cdot \vec{e}_{\theta} = 0$ . On trouve alors :

$$v_{\theta} = Ar + \frac{B}{r}.$$

Les valeurs de A et B sont données par les conditions aux limites cinématiques aux parois en  $r = R_1$  et  $r = R_2$ :

$$A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \qquad \text{et} \qquad B = (\Omega_1 - \Omega_2) \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

#### 4.1.2 Critère inviscide de Rayleigh

L'écoulement de base est l'unique solution linéaire du problème, ce qui ne veut pas dire que cette solution est toujours stable. Nous allons étudier sa stabilité dans le cas simplifier d'un écoulement parfait.

Rayleigh en 1917 a montré que, pour un tel écoulement orthoradial, l'écoulement sera partout stable vis-à-vis de perturbations axisymétriques si

$$\frac{d}{dr}\left[ru_{\theta}(r)\right]^2 > 0.$$



FIGURE 4.2 – (a) Comparaison entre prédiction théorique et expérience pour le seuil d'apparition de l'instabilité de Taylor-Couette dans le plan des deux nombres de Reynolds  $Re_1$  et  $Re_2$  pour un rapport  $R_2/R_1 = 1.14$  [33] et (b) Diagramme des régimes observés dans le montage de Taylor-Couette lorsque les deux cylindres tournent au-delà du seuil [2].

On peut retrouver ce critère en déplaçant par la pensée une particule de fluide ayant une vitesse initiale  $v_1$  en  $r_1$  à un rayon  $r_2$  et en comparant sa nouvelle vitesse  $v'_2$  à la vitesse de ces voisines en  $r_2$ . Selon le signe du bilan de force entre la force centrifuge subit par la particule test et le gradient de pression centripète existant dans le fluide, l'écoulement sera stable ou instable.

On peut améliorer ce critère sans trop de calcul en rajoutant la viscosité de façon simplifiée. L'écoulement sera stable si le temps de transport de la particule de  $R_1$  à  $R_2$  est supérieur au temps de diffusion visqueux du champ de vitesse sur cette distance. On peut alors faire apparaître les deux nombres de Taylor  $Ta_i = Re_i^2 d/R_i$  ou  $d = R_2 - R_1$  est le gap du montage et  $Re_i$  est le nombre de Reynolds construit sur la vitesse à la paroi *i* et le gap d.

Le calcul complet de stabilité est dû à Taylor et présente une similitude mathématique avec l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

#### 4.2 Instabilité de Görtler et instabilité de Dean

Il existe d'autres instabilités dont l'origine physique est proche de celle de Taylor-Couette. On peut citer l'instabilité de Görtler dans la couche limite laminaire se développant sur une surface concave (voir figure 4.3 et Ref. [29]) et l'instabilité de Dean dans une conduite courbée (figure 4.4 page suivante).

L'instabilité De Dean apparait dans les conduites courbées, mais elle est aussi impliquée dans l'amplification des méandres des rivières. Elle doit son nom au travail de W.R. Dean publié en 1927 [15].

Nous supposerons un écoulement laminaire, de type Poiseuille dans une première partie rectiligne de la conduite. Lorsque l'inertie est importante (i.e. haut nombre de Reynolds) le fluide rapide aura tendance à aller tout droit en arrivant dans la courbe, ce qui correspond à un écoulement secondaire dans un plan perpendiculaire à la courbe. Cette écoulement secondaire est centrifuge dans le plan de symétrie de la courbe et centripète près des parois (figure 4.4). Cette instabilité est très efficace pour améliorer le mélange de fluides visqueux.

Supposons que le tube à un rayon r et la courbe un rayon de courbure R. L'action de la viscosité va être de diffuser et amortir cette recirculation. Elle le fait en un temps visqueux  $\tau_{\nu} = r^2/\nu$ , qu'il



FIGURE 4.3 – Schéma des tourbillons de Görtler se développant dans la couche limite d'une paroi concave [32].

faut comparer au temps inertiel que met le fluide du centre du tube à rejoindre la paroi en ligne droite  $\tau_i = L/U$  ou U est la vitesse typique du fluide et L est la distance à parcourir qui vaut  $L = \sqrt{2rR}$  si  $r \ll R$ .

L'écoulement sera instable (présence de la recirculation) si  $\tau_{\nu} > \tau_i$  soit si le nombre de Dean



(4.1)

FIGURE 4.4 – Schéma des 2 vortex contra-rotatifs de Dean se formant dans le coude d'une conduite circulaire [22].

# Instabilités de cisaillement : l'instabilité de Kelvin-Helmholtz

Un exemple atmosphérique de cette instabilité est présenté sur la figure 5.1.

Chacun a observé que lorsque le vent souffle sur un lac par exemple, de petites rides peuvent apparaître si le vent est suffisamment fort. Helmholtz [36] en 1868 fût le premier à décrire le profil de vitesse d'un fluide s'écoulant au-dessus d'un autre au repos. Quelques années après, Lord Kelvin [34] a décrit le mécanisme de cette instabilité. La même instabilité peut être observée au sein d'un écoulement parallèle d'un fluide unique si le profil de vitesse présente un cisaillement localisé. Dans ce cas la tension de surface et la gravité ne jouent aucun rôle. Cette géométrie est parfois appelée la géométrie de la couche de mélange lorsque le cisaillement évolue librement en aval.

Une réalisation expérimentale classique est due à Thorpe [35]. Dans un tube fermé et légèrement incliné à l'instant initial, le fluide le plus dense s'écoule sous l'action de la gravité, et le fluide le plus léger remonte dans l'autre sens (figure 5.2). Dans un tel montage le cisaillement est homogène spatialement mais évolue dans le temps.



Une belle vidéo de démonstration est visible à l'adresse : https://www.youtube.com/watch?v= UbAfvcaYr00.

FIGURE 5.1 – Instabilité de cisaillement de Kelvin-Helmholtz visible dans une couche nuageuse. Les nuages visualisent l'enroulement des tourbillons entre deux flux d'air se déplaçant à des vitesses différentes.



FIGURE 5.2 – Photographie de l'expérience de Thorpe entre deux fluides miscibles superposés mis en mouvement par l'inclinaison temporaire de la cellule.

#### 5.1 Description physique

Décrivons tout d'abord le mécanisme physique de l'instabilité pour un profil discontinu de vitesse, mécanisme basé sur l'inertie et l'équation de Bernoulli. Il existe un référentiel où l'un des fluides se déplace à la vitesse constante +U au-dessus d'une couche du même fluide se déplaçant à la vitesse -U (figure 5.3). Nous supposerons ici qu'il n'existe ni tension de surface ni différence de densité.

Supposons qu'une fluctuation sinusoïdale de l'interface apparaisse (quelque qu'en soit la cause : vibrations, fluctuations thermiques, etc). Il apparaît alors de chaque côté de l'interface des déformations des lignes de courant, en phase avec la déformation de la surface. Ces déformations sont atténuées lorsqu'on s'éloigne de l'interface, et comme le débit est conservé entre deux lignes de courant, le fluide est accéléré du côté convexe et décéléré du côté concave de la perturbation. Si on néglige la viscosité (ce qui est cohérent avec le fait d'avoir un profil discontinu de vitesse) l'équation de Bernoulli nous dit que sur une ligne de courant stationnaire la quantité  $P + \frac{1}{2}\rho u^2$  est constante. Les changements de vitesse le long de la ligne de courant sont donc accompagnés de modification de la pression et donc des contraintes normales qui agissent perpendiculairement à l'interface et qui tendent à amplifier les perturbations initiales de l'interface. C'est donc l'inertie qui est la cause de l'instabilité. Pour comprendre l'existence d'un seuil de l'instabilité et d'une longueur d'onde critique il faut par contre tenir compte des phénomènes stabilisants que sont la tension de surface, la gravité, ou la forme exacte du profil de vitesse. Ce calcul est fait dans les paragraphes suivants.



FIGURE 5.3 – Formes des lignes de courant près d'une interface déformée (en gras). Les signes + et - représentent l'évolution locale de la vitesse ou de la pression. Les variations de pression sont de signes opposés aux variations de vitesse. Les gradients de pression transverses ont donc tendance à amplifier la déformation.

#### 5.2 Equation de Rayleigh pour un profil continu de vitesse

Considérons un domaine infini où un fluide homogène, supposé ici parfait, s'écoule dans une direction Ox avec un profil de vitesse de base  $U_0(y)$  qui ne dépend que de la position transverse y. Par exemple un profil classique est le profil en tangent hyperbolique  $U_0(y) = U_0 \tanh(y/\delta)$ . Si une instabilité apparaît, ce champ de vitesse sera modifié mais la nouvelle solution  $\vec{u} = \vec{U}_0(y) + \vec{u}_1(x, y)$  doit satisfaire l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p)$$
(5.1)

Le théorème de Squire (voir § 9.2) permet de justifier que la première instabilité conduira à des perturbations bidimensionnelles dans le plan (x, y). Il est donc pertinent d'écrire le rotationel de l'équation d'Euler sous la forme d'une équation aux dérivées partielles (PDE) pour la fonction de courant  $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 (u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x})$ :

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \Delta \psi = 0.$$
(5.2)

Pour étudier la stabilité de l'écoulement primaire et développer une étude de stabilité *linéaire* il suffit de considérer de petites perturbations qui peuvent s'écrire comme une somme infinie de composantes de Fourier de la forme :  $\Psi_1 = \Phi(y) \exp[ik(x - ct)]$  où k est un nombre d'onde qui sera supposé réel (c'est-à-dire qu'on ne tient pas compte d'une éventuelle évolution spatiale de l'instabilité) et c est une vitesse de phase éventuellement complexe. La partie imaginaire de c décrira l'évolution temporelle de l'amplitude de l'onde plane. Chaque mode k doit donc satisfaire l'équation dite de Rayleigh :

$$(U_0 - c)\left(\frac{d^2\Phi}{dy^2} - k^2\Phi\right) - \frac{d^2U_0}{dy^2}\Phi = 0.$$
 (5.3)

On peut montrer qu'une condition nécessaire pour observer une instabilité non visqueuse pour cet écoulement est l'existence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse, c'est-à-dire un point où  $\frac{d^2U_0}{dy^2} = 0$  [1].

#### 5.3 Equation de Orr-Sommerfeld pour un profil continu de vitesse

Si l'on reprend l'étude bidimensionnelle précédente mais sans négliger la viscosité cette fois, la même description pour l'équation de Navier-Stokes conduit à l'équation dite de Orr-Sommerfeld (1908) :

$$\nu \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right)^2 \Phi(y) = ik \left[ (U_0 - c) \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right) - \frac{d^2 U_0}{dy^2} \right] \Phi(y) \,. \tag{5.4}$$

Cette équation (qui redonne l'équation 5.3 comme cas particulier pour  $\nu = 0$ ) contient des dérivées d'ordre 4 et est donc beaucoup plus complexe à résoudre. C'est uniquement numériquement, ou en utilisant des approximations de grandes ou petites longueurs d'ondes que l'analyse peut être poursuivie, ce que nous ne ferons pas ici.

#### 5.4 Analyse de stabilité pour un profil de vitesse discontinu

Nous allons maintenant simplifier l'analyse pour pouvoir résoudre analytiquement l'équation de Rayleigh. Considérons deux couches de fluide s'écoulant l'une au-dessus de l'autre dans la même direction Ox avec des vitesses différentes  $U_1$  et  $U_2$  (figure 5.4). Les fluides ont maintenant des densités différentes  $\rho_1$  et  $\rho_2$  le plus léger au-dessus ( $\rho_1 > \rho_2$ ) afin d'éviter l'instabilité de Rayleigh-Taylor (décrite dans la section 3). Nous noterons  $\gamma$  la tension de surface qui existe entre les deux fluides s'ils ne sont pas miscibles.



FIGURE 5.4 – Schéma de l'écoulement parallèle de deux fluides avec les vitesses  $U_1$  et  $U_2$ , et de densité  $\rho_1$  et  $\rho_2$  ( $\rho_2 < \rho_1$ ) et une tension interfaciale  $\gamma$ .

Un tel profil de vitesse discontinu est une solution de l'écoulement de base tant que la viscosité n'est pas prise en compte. En résolvant l'équation d'Euler dans chaque fluide, et en imposant que les solutions décroissent à l'infini  $(y = \pm \infty)$ , la continuité des vitesses normales à l'interface, et la condition de saut de pression à l'interface à cause de la tension de surface, on trouve une équation du second degré pour la célérité complexe des ondes :

$$c^{2} - 2\frac{\rho_{1}U_{1} + \rho_{2}U_{2}}{\rho_{1} + \rho_{2}}c + \frac{\rho_{1}U_{1}^{2} + \rho_{2}U_{2}^{2}}{\rho_{1} + \rho_{2}} - \frac{(\rho_{1} - \rho_{2})g + \gamma k^{2}}{(\rho_{1} + \rho_{2})k} = 0.$$
 (5.5)

Les solutions sont :

$$c = c_r + ic_i = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm i \left[ \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} (U_2 - U_1)^2 - \frac{(\rho_1 - \rho_2)g + \gamma k^2}{(\rho_1 + \rho_2)k} \right]^{1/2}.$$
 (5.6)

Si  $c_i$  est réel,  $c_r$  est la vitesse de phase des ondes et apparaît comme la moyenne pondérée par les densités des vitesses des deux veines de fluide.  $\sigma = kc_i$  est le taux de croissance temporel. L'amplitude des ondes va croître comme  $\exp \sigma t^1$ . La partie imaginaire de la célérité n'apparaît que si le terme déstabilisant inertiel lié à la différence des vitesses est supérieur aux termes stabilisants de la tension de surface et de la gravité. Si ce n'est pas le cas, c est réel et il n'y a donc pas de taux de croissance et juste une modification de la vitesse de phase des ondes selon la valeur de k. On peut noter d'ailleurs

<sup>1.</sup> En réalité l'équation étant non dissipative, elle est réversible et les deux solutions  $\exp \sigma t$  et  $\exp -\sigma t$  existent. Ce souci qui existe aussi dans l'analyse de Rayleigh-Taylor du § 3, disparaît en présence de viscosité.

que si  $U_1 = U_2$  l'équation 5.6 redonne la célérité des ondes interfaciales libres. L'amplification des ondes correspond donc à la condition :

$$(U_2 - U_1)^2 \ge \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{\rho_1 \rho_2} \frac{g}{k} \left( 1 + (k/k_c)^2 \right) \,. \tag{5.7}$$

La plus petite valeur possible de la différence de vitesse correspond donc au nombre d'onde critique, ici le nombre d'onde capillaire  $k_c = \sqrt{\frac{\Delta \rho g}{\gamma}}$  qui sépare les ondes de gravité des ondes capillaires. On est au seuil de l'instabilité si :

$$|U_1 - U_2|_{min} = \left[2\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \left(\Delta \rho g \gamma\right)^{1/2}\right]^{1/2}.$$
(5.8)

Lorsque  $|U_1 - U_2| > |U_1 - U_2|_{min}$  les ondes instables sont comprises entre les deux bornes (appelés modes marginaux) :

$$k_{max/min} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\rho_1 \rho_2 \Delta U^2}{(\rho_1 + \rho_2)\gamma} \pm \left[ \left( \frac{\rho_1 \rho_2 \Delta U^2}{(\rho_1 + \rho_2)\gamma} \right)^2 - \frac{4\Delta \rho g}{\gamma} \right]^{1/2} \right\}.$$
(5.9)

La courbe de stabilité marginale correspondant à l'équation 5.7 est représentée sur la figure 5.5.



FIGURE 5.5 – Courbe de stabilité marginale adimensionnée en fonction de  $k/k_c$  pour l'instabilité de Kelvin-Helmholtz.



FIGURE 5.6 – Evolution du carré du taux de croissance de l'instabilité  $\sigma^2$  (unité arbitraire) pour trois valeurs de la différence de vitesse  $(\Delta U/\Delta U_{min} = 0.9; 1 \text{ et } 1.1).$ 

Le taux de croissance de l'instabilité  $\sigma$  est donné par  $\sigma^2 = c_i^2 k^2$  :

$$\sigma^2 = \frac{\gamma k_c^3}{\rho_1 + \rho_2} \left[ -\frac{k}{k_c} + 2\left(\frac{\Delta U^2}{\Delta U_{min}^2}\right) \left(\frac{k}{k_c}\right)^2 - \left(\frac{k}{k_c}\right)^3 \right].$$
(5.10)

Cette fonction est tracée sur la figure 5.6. L'interface est instable si  $\sigma^2$  est positif. S'il est négatif, cela correspond simplement à une modification de la vitesse de phase des ondes, et les déformations initiales se propagent sans amplification ni atténuation car nous avons négligé les effets visqueux. L'équation 5.10 montre que les petites valeurs de k ne sont pas amplifiées à cause de la gravité et les grandes valeurs de k à cause de la tension de surface. On peut aussi pour toute différence de vitesse  $\Delta U$  calculer le mode le plus instable  $k_0$ .

#### 5.5 Cas d'un profil de vitesse continu

Si le profil de vitesse n'était pas discontinu mais continu sur une taille caractéristique  $\delta$ , il n'y aurait pas vraiment de modification des résultats pour les petits nombres d'onde mais les nombres d'onde plus grand que  $1/\delta$  ne peuvent plus être instables.

**Exercice :** Dans le cas d'un fluide unique avec un profil de vitesse linéaire sur une largeur  $\delta$  raccordant aux vitesses constante  $U_1$  et  $U_2$ , montrer que la célérité complexe s'écrit :

$$c = \frac{U_1 + U_2}{2} \pm \frac{\Delta U}{2k\delta} \left[ (k\delta - 1)^2 - \exp(-2k\delta) \right]^{1/2}$$

Tracer la courbe du taux de croissance  $\sigma(k)$  et discuter les cas limites des petits et grands k. Solution dans la Ref. [17].

#### 5.6 Cas du vent sur la mer

Lorsque le fluide inférieur est de l'eau au repos, et que le fluide supérieur est de l'air, nous obtenons pour un profil de vitesse discontinu la longueur d'onde critique au seuil  $\lambda_c = 2\pi l_c \approx 1.7$  cm et pour la vitesse du vent au seuil  $\Delta U_{min} \approx 7.2$  m/s. Cette valeur est bien trop grande par rapport à la réalité car pour un tel vent les vagues sont déjà en train de déferler. Bien que le mécanisme physique initial corresponde à l'instabilité de Kelvin-Helmholtz d'autres arguments doivent être invoqués (profil de vitesse logarithmique dans l'air, contribution des fluctuations turbulentes pour initier des perturbations, effet du fetch,...). Trouver un seuil réaliste n'est pas simple et est encore controversé.

#### 5.7 Analyse spatiale de stabilité

Nous avons pour l'instant uniquement considéré une analyse temporelle, c'est-à-dire supposé que k était réel et  $\omega$  (ou c) était complexe. Mais on peut à partir de la même relation de dispersion résoudre en supposant  $\omega$  réel et k complexe. Dans ce cas le terme en  $\exp(-k_i x)$  correspond à l'amplification spatiale des ondes lorsque  $k_i$  est négatif. Cette description correspond mieux à la plupart des expériences où il existe un écoulement moyen et une origine des x à partir de laquelle les deux fluides sont mis en contact. Cette description conduit aux notions d'instabilité convective et d'instabilité absolue décrites dans la section 9.6. Toutefois Gaster [21] a montré que, au seuil, les deux descriptions sont équivalentes.

# Instabilité paramétrique : l'instabilité de Faraday

#### 6.1 Introduction

Dans son article de 1831, Michael Faraday s'est intéressé à l'effet de vibrations sur des plaques solides et des surfaces liquides [19]. Dans une de ses expériences il a étudié l'apparition d'onde à la surface d'un bain liquide vibré verticalement (figure 6.1a). Il a en particulier observé l'apparition d'ondes dont la pulsation  $\omega$  correspond à la moitié de la pulsation de forçage  $\omega_f$  (figure 6.1b). Nous verrons que cette instabilité est liée à l'instabilité dite « paramétrique », c'est-à-dire au problème du forçage périodique d'un oscillateur et à sa modélisation par l'équation de Mathieu. Comme pour une balançoire, un pendule pesant peut voir ses oscillations amplifiées par un forçage adéquat. On peut par exemple voir une très belle illustration de ce phénomène dans le cas d'une modulation de la longueur du pendule dans une vidéo de la mise en mouvement de l'encensoir « Botafumeiro » de la cathédrale de Saint-Jacques-de-Compostelle (http://youtu.be/2QFd\_55El11).

Dans l'expérience de Faraday, lorsque le réservoir contenant le liquide vibre verticalement avec une pulsation  $\omega_f$  (f pour forçage) et une amplitude d'oscillation A, il existe, dans le référentiel non galiléen du fluide, une gravité apparente g(t) périodique en temps :

$$g(t) = g[1 + \Gamma \cos(\omega_f t)], \qquad (6.1)$$

où  $\Gamma = A\omega_f^2/g$  est l'accélération relative du récipient, rapport de l'accélération réelle sur l'accélération de la gravité au repos.

#### 6.2 Analyse des perturbations

Cette oscillation verticale peut exciter des ondes de surface (capillaires ou de gravité) dont la pulsation  $\omega$  et le nombre d'onde k sont reliés par la relation de dispersion des ondes de surface  $\omega(k)$ :  $\omega^2 = \left[gk + (\gamma/\rho)k^3\right] \tanh(hk)$ , où  $\gamma$  est la tension interfaciale liquide/gaz et h la profondeur de liquide dans le récipient. Ici  $\omega$  la pulsation propre de l'onde considérée n'est pas obligatoirement  $\omega_f$  mais il s'avère qu'elle est en général proche d'un multiple de  $\omega_f/2$ . En effet, comme un cavalier à cheval au *trot enlevé*, l'interface peut osciller à la fréquence moitié de la fréquence de forçage (figure 6.1b). Toutefois dans le cas où le container est de taille finie, les conditions de résonance de la cavité



FIGURE 6.1 – (a) Principe de l'expérience de Faraday, (b) Schéma des mouvements du liquide aux instant t = 0,  $T_f/2$ ,  $T_f$  et  $3T_f/2$  illustrant le comportement sous-harmonique à la pulsation  $\omega = \omega_f/2$  (d'après S. Douady).

sélectionnent des modes propres particuliers k et il est alors possible qu'il y ait finalement un petit décalage (detuning en anglais)  $\delta = \omega_f - 2\omega$  par rapport à la condition de résonance  $\delta = 0$ .

Pour trouver l'équation de la dynamique de l'amplitude de ces ondes, on considèrera un fluide parfait, un hauteur h de liquide et pour simplifier le calcul nous supposerons que le fluide au-dessus est de masse volumique négligeable. Reprenons alors l'analyse des ondes de surface.

- 1. On considère déformation de la surface libre sous la forme d'une onde plane monochromatique  $\zeta(x,t) = a(t) \exp(ikx)$  et nous prendrons l'axe Oz dirigé vers le haut.
- 2. On suppose l'écoulement sous les vagues irrotationnel car le fluide est parfait et initialement au repos, soit  $\vec{v} = \vec{\nabla}(\Phi)$ . L'incompressibilité conduit à l'équation  $\nabla^2 \Phi = 0$ . En écrivant que  $\Phi(x, z, t) = f(z, t) \exp(ikx)$  on peut résoudre la dépendance de f avec z avec la condition aux limites de vitesse verticale nulle au fond du récipient.
- 3. Le fluide parfait irrotationnel satisfait partout à l'équation de Bernoulli instationnaire :

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + g(t)z = F(t)$$
(6.2)

où l'on peut choisir la constante  $F(t) = P_{atm}/\rho$  par un choix judicieux du potentiel des vitesse en écrivant  $\Phi' = \Phi - \int (F(t) - P_{atm}/\rho) dt$ .

- 4. Condition cinématique à l'interface  $w (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ .
- 5. Condition dynamique à l'interface, le saut de pression de Laplace :  $p(\zeta^{-}) P_{atm} = \gamma(1/R_1 + 1/R_2)$ .
- 6. En linéarisant les équations (hypothèse de faible amplitude  $ka \ll 1$ ) on peut négliger les termes d'ordre 2 dans Bernoulli et dans les conditions interfaciales.

On obtient alors l'équation suivante pour l'évolution de l'amplitude des ondes de surface :

$$\ddot{a} + \left[g(t)k + \gamma k^3/\rho\right] \tanh(hk)a = 0.$$
(6.3)



FIGURE 6.2 – Motif carré observé au-dessus du seuil de l'instabilité de Faraday (cliché S. Morris).

Si g(t) est en fait constant on retrouve bien les solutions  $a = a_0 \exp(\pm i\omega t)$  des ondes de surfaces classiques.

#### 6.3 Equation de Mathieu (1868)

En remplaçant g par la gravité variable g(t) (Eq. 6.1) on a donc fait apparaître une pseudo pulsation (pseudo car fonction du temps)  $\omega(t)$ :

$$\omega^{2}(t) = \left[g(t)k + \frac{\gamma}{\rho}k^{3}\right] \tanh(hk) = \omega^{2}\left(1 + \epsilon \cos \omega_{f}t\right),$$

avec ici un nouveau paramètre de contrôle adimensionné  $\epsilon = \Gamma / [1 + (k/k_c)^2]$ , où nous avons introduit le nombre d'onde capillaire  $k_c = \sqrt{\rho g / \gamma}$ .

L'équation de la dynamique de l'amplitude peut alors s'écrire :

$$\ddot{a} + \omega^2 \left(1 + \epsilon \cos \omega_f t\right) a = 0. \tag{6.4}$$

C'est l'équation d'un oscillateur paramétrique de pulsation propre  $\omega$  forcé à la pulsation  $\omega_f$ . On peut l'écrire sous la forme canonique d'une équation de Mathieu<sup>1</sup> [7] en posant  $T = \frac{1}{2}\omega_f t$ ,  $p = 4(\omega(k)/\omega_f)^2$  et  $q = \epsilon p/2$ :

$$\frac{d^2a}{dT^2} + (p + 2q\cos 2T)a = 0.$$
(6.5)

Cette équation présente des solutions instables pour certaines valeurs des paramètres p et q. La figure 6.3 montre en grisé l'existence de langues de domaine instable correspondant soit à un mode

<sup>1.</sup> Émile Léonard Mathieu (1868)

sous-harmonique, soit synchrone soit plus généralement un multiple de la moitié de la fréquence de forçage.



FIGURE 6.3 – Diagramme d'existence dans le plan (q, p) des solutions instables de l'équation de Mathieu (d'après l'article de Benjamin et Ursel, Ref. [4]).

Dans la limite des faibles forçage ( $\epsilon$  petit donc petit q), seuls quelques modes sont instables, mais en l'absence de dissipation, l'interface est toujours instable.

#### 6.4 Effet de la dissipation

Dans le cas où l'on considère un petit effet de dissipation visqueuse, on peut écrire la dissipation de façon phénoménologique et l'on modélise alors la dynamique de l'interface par l'équation de Mathieu d'un pendule forcé amorti :

$$\ddot{a} + \beta \dot{a} + \omega (k)^2 (1 + \epsilon \cos \omega_f t) a = 0$$

où  $\beta$  sera ici le taux de dissipation visqueuse (il est homogène à l'inverse d'un temps de dissipation, par exemple  $\beta = 2\nu k^2$  en eau profonde loin des parois). On trouve par le calcul [24] que le seuil de l'instabilité paramétrique est alors donné par :

$$\epsilon_c = \frac{2}{\omega}\sqrt{\beta^2 + \delta^2}$$

où  $\delta = \omega_f - 2\omega$  est le désaccord (detuning) de fréquence. Sans décalage de fréquence et sans dissipation visqueuse, le seuil serait nul pour cette instabilité. A la résonance ( $\delta = 0$ ) le seuil du régime instable de cet oscillateur est minimum et vaut  $\epsilon_c = 2\beta/\omega$ .

A cause de la forme de  $\beta(k)$  les petites longueurs d'ondes (hautes fréquences) sont plus amorties et l'on observe au seuil que le premier mode avec une pulsation moitié de la fréquence de forçage.

#### 6.4. EFFET DE LA DISSIPATION

Dans le cas où le récipient est de taille fini, les parois latérales imposent une vitesse horizontale nulle à la paroi, donc un ventre de vibration de l'interface et l'on a donc une quantification des nombres d'onde observés. De plus les directions x et -x étant équivalente on observe souvent, après superposition avec les solutions réfléchies sur les parois, des ondes stationnaires de la forme  $\zeta = a_0 \cos \omega t \cos(kx)$ . Dans certains cas aussi des motifs hexagonaux sont observés au seuil.

#### Pour en savoir plus sur l'instabilité de Faraday :

- P. Bergé, Y. Pomeau, and C. Vidal. Ordre dans le chaos. Hermann, 1998 [8].
- J. Bechhoefer, V. Ego, S. Manneville, and B. Johnson. An experimental study of the onset of parametrically pumped surface waves in viscous fluids. J. Fluid Mech., 288 :325–350, 1995
   [6].
- T. B. Benjamin and F. Ursell, The Stability of the Plane Free Surface of a Liquid in Vertical Periodic Motion, Proc. R. Soc. Lond. A 225, 505–515, 1954 [7].

Et une vidéo : http://www.youtube.com/watch?v=8LEeENVSG-k&src\_vid=tl6S5CS-6JI& feature=iv&annotation\_id=annotation\_180143.

# Instabilités visqueuses : l'instabilité de Saffman-Taylor

Cette instabilité apparaît lorsqu'un fluide peu visqueux pénètre dans un fluide plus visqueux. Elle est le plus souvent étudiée dans un cellule de Hele-Shaw (écoulement entre deux plaques planes proches) mais elle existe surtout dans les milieux poreux. Cette instabilité est emblématique des instabilités morphogénétiques (qui génèrent des formes). La figure 7.1 montre par exemple le cas d'une injection localisée de gaz entre deux plaques de verre séparées par une mince couche d'huile.



FIGURE 7.1 – Interface air/huile observée en géométrie circulaire. L'air est injecté au centre à basse vitesse dans l'image de gauche et à haute vitesse dans l'image de droite. Seules les extrémités des doigts d'air continuent à croître. Les autres parties du front de croissance air/huile sont pratiquement immobiles car les gradients de pression dans l'huile sont écrantés par les doigts les plus développés.

#### 7.1 Loi de Darcy

Le montage classique pour l'étude de l'instabilité de Saffman-Taylor est soit un milieu poreux, soit une cellule de Hele-Shaw [23] (deux parois parallèles et proches). Nous allons d'abord établir la loi de Darcy qui relie la vitesse moyenne locale au gradient de pression local dans une telle cellule [14]. Nous supposerons que les deux plans limitant la cellule sont horizontaux – afin de pourvoir négliger la gravité –, parallèles et séparés d'une petite distance *b*. Le mouvement de chacun des deux fluides est gouverné par l'équation de Navier-Stokes. Si le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de la cellule est petit et si l'écoulement est quasi-stationnaire, l'équation de Navier-Stokes se réduit à l'équation de Stokes :

$$\overrightarrow{\nabla}^2 \vec{u} = \frac{1}{\eta} \overrightarrow{\nabla} p \tag{7.1}$$

où  $\eta = \rho \nu$  est la viscosité dynamique de chacun des fluides. Tant que les échelles horizontales sont grandes comparées à l'épaisseur de la cellule on peut écrire que  $\overrightarrow{\nabla}^2 \vec{u} \approx \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2}$  et l'équation précédente se réduit pour les composantes (u, v, w) de la vitesse  $\vec{u}$  à :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{cases}$$

De plus la conservation de la masse nous permet de négliger les vitesses verticales (axe z) devant les vitesses horizontales. Nous avons alors w = 0 et donc  $\partial p/\partial z = 0$ . Donc p ne dépend pas de z et les équations précédentes peuvent être intégrées selon z. Les vitesses u et v sont donc quadratiques en z, c'est en effet un écoulement de Poiseuille plan. Si l'on prend en compte la condition de nonglissement sur les parois horizontales z = 0 et z = b il vient :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} z(z-b) \\ v = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial y} z(z-b) \\ w = 0 \end{cases}$$

Nous obtenons alors une équation linéaire entre la vitesse moyennée sur l'épaisseur (vitesse débitante)  $\vec{V} = \frac{1}{b} \int_0^b \vec{u} dz$  et le gradient horizontal de la pression :

$$\vec{V}(x,y,t) = -\frac{b^2}{12\eta} \overrightarrow{\nabla_h} p$$
(7.2)

Dans cette équation  $\vec{V}$  est un vecteur à deux composantes et  $\overrightarrow{\nabla_h}p$  est le gradient horizontal de la pression (nous omettrons dans la suite l'indice h). Cette équation s'appelle l'équation de Darcy et elle est valide dans chacun des fluides, du moment que le profil de la vitesse reste parabolique, c'està-dire tant que l'on n'est pas trop près de l'interface entre les deux fluides ou des parois verticales de la cellule. Dans le cadre de cette approximation l'écoulement horizontal est bidimensionnel et irrotationnel ( $\overrightarrow{rot} \vec{V} = \vec{0}$ ). Cette dernière propriété fait que la cellule de Hele-Shaw est souvent utilisée pour visualiser les lignes de courant d'un écoulement irrotationnel autour d'un obstacle, ce qui est a priori surprenant puisque nous avons ici un écoulement d'un fluide visqueux alors que les écoulements irrotationnels (potentiels) correspondent généralement à des écoulements de fluides parfaits.

#### 7.2 Description qualitative de l'instabilité

Nous allons montrer qualitativement que l'interface entre deux fluides de viscosités différentes est instable si le fluide le moins visqueux repousse le fluide le plus visqueux.

Supposons que les deux fluides s'écoulent horizontalement dans la cellule de Hele-Shaw, à la même vitesse U le long de l'axe des x et que l'interface qui les sépare soit initialement plane et perpendiculaire à Ox (figure 7.2).



FIGURE 7.2 – Schéma d'une interface se déplaçant à la vitesse U entre les fluides 1 et 2.

FIGURE 7.3 – Dessin des isobares devant et à l'arrière de l'interface déformée.

Si les deux fluides sont incompressibles, div  $\vec{V} = 0$ , et si l'épaisseur *b* est aussi constante, l'équation 7.2 montre que le champ de pression satisfait l'équation de Laplace :

$$\vec{\nabla}^2 p = 0. \tag{7.3}$$

Le champ de pression est donc un champ harmonique dans chaque fluide.

Décrivons maintenant qualitativement le mécanisme d'instabilité en négligeant tout d'abord la tension de surface, ce qui fait que l'interface reste une isobare. Imaginons tout d'abord une faible perturbation de l'interface, périodique en y. Les isobares de chaque côté de l'interface restent à peu près parallèles à l'interface mais la perturbation doit s'amortir loin de l'interface car de chaque côté la pression satisfait l'équation de Laplace. Même si l'interface n'était pas déformées, si le fluide 1 est moins visqueux que le fluide 2, les isobares sont un peu plus resserrés dans le domaine 2 (figure 7.3) car on y trouve l'essentiel de la perte de charge. Au niveau des bosses de l'interface, les isobares sont plus resserrées que devant les creux, le gradient de pression y est donc plus important et la vitesse locale de l'interface y est donc plus grande (Eq. 7.2). En conséquence, au cours du mouvement, les crêtes se déplacent plus vite que les creux : les déformations initiales de l'interface sont donc amplifiées si  $\eta_1 < \eta_2$ , mais amorties si  $\eta_1 > \eta_2$ . Sans tension de surface, les crêtes formeraient rapidement des pointes (singularités en temps finis). Dans la réalité la tension de surface est un facteur limitant la courbure des pointes et qui ralentit donc la croissance de l'instabilité. Notons que même en l'absence de tension de surface (cas des fluides miscibles) il existe une autre limitation à la formation de singularités, car lorsque la courbure dans le plan (x, y) de la cellule devient de l'ordre de l'épaisseur de la cellule, l'approximation de la loi de Darcy bidimensionnelle n'est plus justifiée.

#### 7.3 Analyse linéaire de l'instabilité

Nous allons maintenant calculer l'évolution linéaire de l'instabilité du front plan. On introduira le nombre capillaire  $Ca = \eta U/\gamma$ , où  $\eta$  est la viscosité dynamique du fluide le plus visqueux,  $\gamma$  la tension de surface entre les deux fluides et U la vitesse du front plan. Ce nombre compare les forces visqueuses aux forces capillaires. Nous allons établir la relation de dispersion et tracer la courbe de stabilité marginale dans le cas simplifié d'un fluide très peu visqueux, par exemple un gaz (fluide 1) repoussant un liquide visqueux et mouillant les parois (fluide 2).

#### 7.3.1 Ecoulement de base (i.e. ordre 0)

Supposons d'abord que l'interface est rectiligne et avance à la vitesse U. La vitesse moyenne est alors constante partout et l'on a  $\vec{V_1} = \vec{V_2} = U\vec{e_x}$ . En effet le ménisque qui relie les deux parois est entrainé par le fluide à la vitesse moyenne, donc à la vitesse débitante locale. L'équation de Darcy (7.2) nous donne alors la relation :  $\frac{1}{\eta_1} \frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{1}{\eta_2} \frac{\partial P_2}{\partial x}$ . Compte tenu de la faible viscosité de l'air ( $\eta_1 \ll \eta_2$ ),  $P_1$  est pratiquement constant et il suffit de résoudre l'équation 7.2 dans le milieu 2. On trouve :

$$P_2(x,t) = P_1 - \frac{2\gamma}{b} - \frac{U}{b^2} 12\eta_2(x - Ut)$$
(7.4)

pour la pression (x > Ut) dans le fluide 2, équation qui tient compte du saut de pression à l'interface courbée dans le plan vertical si le liquide 2 mouille parfaitement la paroi, et de la position  $\zeta_0 = Ut$  de l'interface à l'instant t. Cette pression est écrite dans le référentiel des parois, et x - Ut est la distance à l'interface à un instant t.

#### 7.3.2 Ecoulement perturbé (i.e. ordre 1)

Afin d'étudier la stabilité de l'écoulement de base, supposons maintenant que cette interface plane soit légèrement perturbée et décomposons cette perturbation dans la direction y en série de Fourier [13]. Comme nous ferons une analyse linéaire il suffit d'étudier indépendamment chacun des modes de Fourier en  $\sin(ky)$ .

On écrit donc à l'ordre 1,  $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1$  avec  $\zeta_0 = Ut$  et  $\zeta_1 = a \exp(\sigma t - iky)$ ,  $p = p_0 + p_1$  avec  $p_0 = P_2(x, t)$  (Eq. 7.4) et  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$  avec  $\vec{v}_0 = U\vec{e}_x$ .

Si après étude de la relation de dispersion on trouve  $\sigma(k) > 0$  la perturbation sera amplifiée et le front plan sera instable, si tous les  $\sigma(k) < 0$  le front plan sera stable. Si  $\sigma$  était imaginaire pure cela correspondrait à des ondes propagatives le long de l'interface mais ça ne sera pas le cas ici car le fluide est visqueux (contrairement à l'instabilité de Rayleight-Taylor par exemple, § 3 page 11).

Compte tenu que la pression doit satisfaire l'équation de Laplace, on obtient pour la perturbation de pression  $p_1 = A(t) \exp(-k(x - Ut)) \exp(-iky)$ .

Il faut ensuite écrire la condition cinématique à l'interface :

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} + v_y \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} = v_x,$$

qui donne au premier ordre la relation :

$$\sigma a \exp(\sigma t) = A(t) \frac{b^2 k}{12\eta_2}.$$

et la condition dynamique linéarisée :

$$p_1(x,t) = \gamma \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial y^2}$$

Ce qui donne la relation

$$A(t) = \left(\frac{12\eta_2}{b^2}U - \gamma k^2\right)a\exp(\sigma t).$$

En éliminant A(t) de ces 2 relations on obtient la relation de dispersion :

$$\sigma = Uk - \frac{b^2 \gamma}{12\eta_2} k^3. \tag{7.5}$$

Dans le cas complet, avec deux fluides visqueux, le taux de croissance  $\sigma$  est donné par la relation de dispersion :

$$\sigma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} Uk - \frac{b^2 \gamma}{12(\eta_2 + \eta_1)} k^3$$
(7.6)

où k est le nombre d'onde de la perturbation. Comme  $\sigma$  est toujours réel, la déformation ne se propage pas selon y. Le front est instable si  $\sigma > 0$  c'est-à-dire si  $(\eta_2 - \eta_1)U > 0$ . Cette condition correspond à un fluide de faible viscosité repoussant un fluide plus visqueux par rapport aux parois immobiles de la cellule. Cette instabilité n'a pas de seuil, dès que l'interface bouge elle devient instable. Le deuxième terme de l'équation précédente, toujours négatif, montre que la tension de surface limite la croissance de l'instabilité, en particulier pour les grandes valeurs de k. Le vecteur d'onde le plus amplifié  $k_c$  correspond au maximum de la courbe de  $\sigma(k)$ . Dans le cas où  $\eta_1 \ll \eta_2$  et en introduisant le nombre capillaire  $Ca = \eta U/\gamma$ , il vient :

$$k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} = \frac{2}{b}\sqrt{Ca}.$$
(7.7)

et pour le taux de croissance maximum :

$$\sigma_c = \frac{4\gamma}{3b\eta_2} C a^{2/3}$$

A basse vitesse (faible Ca), les longueurs d'ondes observées sont grandes mais elles sont plus petites à plus hautes vitesses (Ca élevé). Ce résultat théorique peut être testé expérimentalement en imposant à l'instant initial une vitesse U à une interface initialement au repos. Rapidement toutefois l'amplitude des déformations n'est plus petite car on n'observe pas de saturation à faible amplitude. L'analyse linéaire n'est alors plus valable. On peut noter que cette analyse de stabilité présente de profondes similarités avec l'analyse de stabilité d'un front de croissance d'un cristal initialement plan [27].

**Exercice :** Calculer pour une vitesse U = 1 cm/s, une épaisseur b = 1 mm et pour une huile de viscosité  $\nu = 100\nu_{eau}$ , la valeur du nombre capillaire Ca, la longueur d'onde la plus instable et le taux de croissance. Justifier que les approximations faites sont corrects.

**Correction de Park et Homsy :** En réalité la courbure dans un plan vertical de l'interface entre les deux fluides n'est pas une constante car l'épaisseur des films liquides déposés par le liquide mouillant sur les surfaces dépend de la vitesse d'avancée de l'interface. Park et Homsy [28] ont montré que le terme de Laplace  $-2\gamma/b$  doit être multiplié par  $(1+3.8Ca^{2/3})$  au premier ordre pour tenir compte des films de landau-Levich déposés sur les plaques. Il existe donc une correction en  $Ca^{2/3}$  mais celle-ci reste faible à faible vitesse.

#### 36 CHAPITRE 7. INSTABILITÉS VISQUEUSES : L'INSTABILITÉ DE SAFFMAN-TAYLOR

#### 7.4 Evolution non-linéaire de l'instabilité

En 1958, Saffman et Taylor ont été les premiers à décrire une saturation non-linéaire de l'instabilité [31]. Dans une cellule de Hele-Shaw de largeur constante W, ils ont observé que l'interface évolue vers une forme stationnaire se propageant à vitesse constante. Ce « doigt » reste large à faible débit d'injection mais tend à occuper la moitié de la largeur de la cellule à plus grand débit (figure 7.4a). Expérimentalement il existe une fonction unique qui relie la largeur relative du doigt  $\lambda$  à sa vitesse de propagation U.



FIGURE 7.4 – (a) Photographie d'un doigt d'air de Saffman-Taylor se propageant à vitesse constante de gauche à droite dans une cellule de Hele-Shaw linéaire initialement remplie d'huile. Cette forme correspond bien à la forme théorique du doigt de Saffman-Taylor pour  $\lambda = 0.5$  (Eq. 7.8). (b) Doigt d'air instable à grand débit dans la même cellule linéaire [3].

En négligeant l'effet de la tension de surface, Saffman et Taylor ont pu trouver par la méthode des transformations conformes la forme stationnaire du doigt. Ils ont trouvé une famille continue de solutions donnée par l'équation :

$$x = \frac{W(1-\lambda)}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda W}y\right)\right]\right)$$
(7.8)

où  $0 \le \lambda \le 1$  est le rapport de la largeur du doigt sur la largeur du canal<sup>1</sup>. Le doigt de largeur  $\lambda = 0.5$  se compare assez bien à la forme expérimentale de la figure 7.4a.

Sans tension de surface il n'existe pas de mécanisme de sélection entre la largeur du doigt  $\lambda$  et sa vitesse d'avancée U. Contrairement à l'expérience, pour toute vitesse U toutes les largeurs sont théoriquement possibles. Le mécanisme de sélection par la tension de surface n'a finalement été compris

<sup>1.</sup> Ces solutions sont les analogues de la parabole d'Ivantsov pour la croissance cristalline d'une dendrite libre

qu'en 1986. Toutefois, même en cellule linéaire, si l'écoulement est trop rapide le doigt de Saffman-Taylor devient finalement instable et des structures bien plus complexes sont observées (figure 7.4b).

Dans une cellule circulaire où l'air est injecté au centre de grandes plaques transparentes, il apparait le même phénomène d'instabilité. Seule l'extrémité des doigts se développe, devient instable soit par une division de la pointe (tip-splitting) soit par des branchements latéraux (side-branching) et les doigts ne se restabilisent jamais (figure 7.1 gauche)<sup>2</sup>. La structure devient rapidement de plus en complexe et fractale (figure 7.1 droite) et a été comparée aux structures DLA (Diffusion Limited Aggregation) simulées sur ordinateur.

<sup>2.</sup> Dans toute cette dynamique, à cause de la loi de Darcy et de l'équation de Laplace sous-jacentes, il existe une forte similarité avec les phénomènes « d'effet de pointe » en électrostatique et dans les figures de claquage dans un isolant diélectrique (figures de Lichtenberg).

### 38 CHAPITRE 7. INSTABILITÉS VISQUEUSES : L'INSTABILITÉ DE SAFFMAN-TAYLOR

## Instabilités de convection thermique

#### 8.1 Convection de Rayleigh-Bénard

Lorsqu'une couche de fluide placée entre deux parois horizontales est soumise à un gradient vertical de température, il apparaît un mouvement de convection au-dessus d'une différence de température critique  $\Delta T_c$ . A faible différence de température le fluide reste au repos et le transfert de chaleur a lieu par conduction, mais au-dessus d'un nombre de Rayleigh critique, des rouleaux de convection de sens contraire se mettent progressivement en place (figure 8.1). La bifurcation est supercritique pour les fluides usuels.



FIGURE 8.1 – Rouleaux de Rayleigh-Bénard observés dans de l'huile de silicone par interférométrie ([18] p. 82).

Une étude dimensionnelle du problème fait apparaître un nombre critique, le nombre de Rayleigh :

$$Ra = \frac{g\alpha\Delta Td^3}{\nu\kappa}.$$

En effet pour que le mouvement de convection ait lieu il faut que la force motrice (la dilatation thermique du fluide) soit suffisante pour vaincre les deux phénomènes stabilisants, la conductivité thermique et la dissipation visqueuse.

Ecrivons la variation de la masse volumique avec la température  $\rho(T_0 + \Delta T) = \rho(T_0)(1 - \alpha\Delta T)$ , où  $\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique volumique. La force de flottaison (poussée d'Archimède) est de l'ordre de  $\rho g \alpha \Delta T$  ce qui, si elle était seule, conduirait à un mouvement vertical uniformément accéléré et donc au parcours de la distance d en un temps  $t^2 = 2d/(g\alpha\Delta T)$ . Ce temps t doit être plus court que le temps de diffusion visqueuse sur la couche de fluide de hauteur  $\tau_v = d^2/\nu$  et plus court que le temps de diffusion thermique :  $\tau_T = d^2/\kappa$  où  $\kappa$  est la diffusivité thermique du fluide. En ordre de grandeur il faut donc que  $t^2 < \tau_v \tau_T$ , soit :

$$Ra = \frac{g\alpha\Delta Td^3}{\nu\kappa} < 1.$$

Le calcul complet montre que la valeur critique du Rayleigh est  $Ra_c = 1708$  pour que la convection commence (figure 8.2). Près du seuil on observe des rouleaux de convection sous forme de cylindres parallèles contra-rotatifs de faible intensité (bifurcation supercritique).



FIGURE 8.2 – Diagramme de stabilité dans le plan (Ra, kd) de l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

#### 8.2 Instabilité de Bénard-Marangoni

Cette instabilité, aussi d'origine thermique, est observée lorsqu'un liquide présentant une surface libre est chauffé par le bas. Un paramètre clé est la baisse de la tension de surface lorsque la température augmente. Les gradients de température en surface induisent des gradients de tension de surface et donc des écoulements de surface (effet Marangoni). Le plus souvent ce sont des structures hexagonales qui sont observées (figure 8.3).



FIGURE 8.3 – Instabilité de Bénard-Marangoni dans un mélange huile/poudre d'aluminium vue de dessus. Les lignes noires sont les zones d'écoulement descendant et les sortes d'étoile au centre des cellules sont les zones d'écoulement montant.

## **Compléments théoriques**

#### 9.1 Bifurcations supercritiques et bifurcations sous-critiques

Lorsqu'un paramètre contrôlant un écoulement augmente, il est possible que l'écoulement perde sa stabilité. Souvent il ne transite pas directement vers un écoulement turbulent mais il évolue vers une nouvelle solution stable. On parle alors de « bifurcation » et cela correspond en général à une perte de symétrie de l'écoulement (e.g. perte de l'invariance spatiale ou temporelle). Si la nouvelle solution est d'amplitude aussi faible que l'on veut au voisinage du seuil de la bifurcation, on parle de bifurcation supercritique. Si l'on saute vers une solution d'amplitude finie, et s'il existe un domaine du paramètre de contrôle où les deux écoulements sont possibles (hystérésis) on parle de transition sous-critique.

Voir figures 9.1 :



FIGURE 9.1 – Diagramme de stabilité d'une instabilité supercritique (a) et (b) et sous-critique (c) d'après le livre [12] page 80.

#### 9.2 Théorème de Squire

Ce théorème (Squire, 1933) permet de montrer, dans certaines conditions bien définies (en particulier l'existence de parois rigides), qu'un phénomène d'instabilité a priori tridimensionnel peut se ramener à un problème bidimensionnel (voir Charru [12] page 108 par exemple, ou Ref. [17]) : i.e. l'instabilité 2D est la première à apparaître.

#### 9.3 Description faiblement non-linéaire en « petite boite »

Ce formalisme a été introduit par Stuart puis développé par Landau. Il présente une très grande analogie avec la théorie des transitions de phase. Lorsqu'on est en « petite boite », se système est confiné et les nombres d'ondes possibles sont quantifiés. Près du seuil un seul mode de nombre d'onde  $k_c$  est instable, il suffit donc de décrire sa dynamique. En « grande boite » le nombre d'onde peut évoluer près du seuil et il peut apparaître des évolutions spatio-temporelles (voir Poly de TD).

#### 9.3.1 Le cas des transitions supercritiques

Note sur l'équation de Landau et les temps de croissance et de décroissance

Estimation du temps d'installation d'une amplitude donnée par augmentation ou diminution abrupte du paramètre de contrôle  $\epsilon$ . Partons de l'équation de Landau qui est un développement limité aux premiers ordres pertinents :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \epsilon A - \mu A^3 \tag{9.1}$$

**Par augmentation du paramètre de contrôle.** Ici l'on part de la solution stable A = 0 avec un  $\epsilon_2$  négatif, et l'on saute brutalement à une valeur positive (mais petite)  $\epsilon_1$ . C'est le cas classique, l'amplitude est petite et l'on peut donc linéariser l'équation de Landau. On a une croissance exponentielle de l'amplitude avec un taux de croissance proportionnel à l'écart au seuil  $\epsilon_1$ .

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \epsilon_1 A$$

dont la solution est  $A = A_0 \exp(\epsilon_1 t)$ . Le temps  $\tau_1$  pour passer d'une amplitude de bruit de fond  $A_0$ à t = 0 à une amplitude de mesure  $A_1$  (qui est bien sur inférieure à l'amplitude à saturation  $A_s$ ) est donné par la relation :

$$\tau_1 = \frac{\ln(A_1/A_0)}{\epsilon_1} \tag{9.2}$$

Ce temps diverge au voisinage du seuil, c'est ce que l'on appelle le phénomène de **ralentissement critique** dans la théorie des changements de phase.

Expérimentalement il est plus facile de tracer  $1/\tau_1$  en fonction de  $\epsilon_1$ . On peut aussi le faire audessous du seuil en mesurant le temps d'amortissement. L'ajustement linéaire permet d'estimer précisément le seuil de l'instabilité.

#### 9.3.2 Le cas des transitions sous-critiques

Parfois  $\mu$  dans l'équation de Landau (Eq. 9.1) se trouve être négatif et le premier terme nonlinéaire ne diminue pas le taux de croissance. Il n'y a saturation que si l'on va à l'ordre suivant dans le développement en puissance.

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \epsilon A + \mu A^3 - g A^5 \tag{9.3}$$

Comme dans le cas précédent A = 0 est solution, mais cette solution n'est stable que pour  $\epsilon$ négatif. Lorsqu'il est positif une autre solution  $A_s$  est stable. Dans la gamme [-xx, 0] du paramètre de contrôle il existe 2 solutions stables et une solution instable à l'équation. Ce qui fait que lors d'une augmentation continue du paramètre de contrôle on ne trouve pas le même seuil de transition que lors d'une diminution de ce paramètre. Il existe donc d'une part un hystérésis (un effet de mémoire) du système, et d'autre part il n'existe pas d'état d'équilibre (saturé) d'amplitude très petite au voisinage du seuil, contrairement au cas super-critique.

Expérimentalement, s'il existe des fluctuations sur la valeur du paramètre de contrôle il est parfois délicat de trancher entre une bifurcation supercritique "raide" ou une bifurcation faiblement souscritique.

#### 9.3.3 Bifurcation imparfaite

On observe des bifurcations imparfaites lorsque les solutions A et -A ne sont plus équivalentes. Par exemple pour les rouleaux de bord induit par les couches limites dans l'instabilité de Taylor-Couette.

#### 9.4 L'instabilité de Benjamin-Feir

Une référence : Charru p. 269

#### 9.5 L'équation de Ginsburg-Laudau complexe

Utilisé pour décrire des systèmes étendus spatialement et par exemple la propagation de front instable. Voici par exemple le cas d'une bifurcation sous-critique entre une interface plate et un état ondulé convectif que l'on peut décrire par une équation de Ginzburg Landau complexe (CGL) d'ordre 5. Cette équation pour l'amplitude A de l'onde s'écrit dans un cas unidimensionnel (1D) comme :

$$\tau_0 \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + V_g \frac{\partial A}{\partial x} \right] = \mu (1 + ic_0) A + \xi_0^2 (1 + ic_1) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + g(1 + ic_2) |A|^2 A - h|A|^4 A, \qquad (9.4)$$

où x représente la direction de l'écoulement et  $\mu = (U_g - U_{gc})/U_{gc}$  est le paramètre de contrôle réduit. Les six coefficients  $\tau_0$ ,  $V_g$ ,  $c_0$ ,  $\xi_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  sont réels et g et h sont aussi supposé réel. Notons que comme souvent nous n'avons pas pris en compte tout les termes d'ordre 5 possibles mais uniquement les termes suffisant pour décrire la saturation de l'amplitude.

Pour une onde d'amplitude complexe variant lentement en espace et en temps si on la compare au nombre d'onde critique  $k_c$  et à la pulsation  $\omega_c$ , les petites perturbations près du mode critique s'écrivent  $A(x,t) = A_0 \exp[i(k-k_c)x - i(\omega - \omega_c)t]$ . En considérant le cas d'un écoulement ouvert forcé à un fréquence réel nous prendrons  $\omega$  réel et  $k = k_r + ik_i$  complexe. En substituant l'expression de A(x,t) dans l'équation précédente, on obtient un système de deux équations pour la partie réelle et la partie complexe :

$$-\tau_0 V_g k_i = 2k_i (k_r - k_c) \xi_0^2 c_1 + \mu -\xi_0^2 [(k_r - k_c)^2 - k_i^2] + g|A|^2 - h|A|^4$$
(9.5)

$$\tau_0[-(\omega - \omega_c) + V_g(k_r - k_c)] = \mu c_0$$
  
-\xi\_0^2 c\_1[(k\_r - k\_c)^2 - k\_i^2] + g c\_2 |A|^2 - 2\xi\_0^2 k\_i (k\_r - k\_c) (9.6)

Chacun des 8 coefficients peut être déterminé expérimentalement en considérant des cas particuliers qui annulent de nombreux termes dans ces deux équations.

#### 9.6 Instabilité convective ou instabilité absolue?

On appelle « écoulements ouverts » des écoulements où il existe une vitesse d'advection moyenne (ce n'est jamais le même fluide qui passe en un point donné). La réponse à une perturbation va donc dépendre du temps et donc de l'espace à cause de cette vitesse d'advection. La localisation de la source de bruit dans l'espace physique et la perte des propriétés d'invariance galiléenne qui en découle ont des conséquences importantes. Lors du développement de l'instabilité à partir d'un germe localisé en temps et en espace se pose la question suivante : la perturbation va-t-elle se développer suffisamment vite pour pouvoir remonter le courant et ne pas être à terme balayée par l'écoulement ? Ce problème est illustré par la figure 9.2.



FIGURE 9.2 – Diagramme spatio-temporel illustrant le comportement d'un paquet d'onde dans un écoulement ouvert. A gauche perturbation advectée mais amortie, au centre cas d'une instabilité convective, à droite cas d'une instabilité absolue.

CHAPITRE 9. COMPLÉMENTS THÉORIQUES

## Autres instabilités et tableau récapitulatif

#### 10.1 Quelques autres exemples d'instabilités

Instabilité de Crow : Instabilité du sillage des avions (figure 10.1). Une référence [10]. Instabilité magnétique : Instabilité des ferrofluides. Une référence [5].

**Instabilité de Langmuir :** Les circulations de Langmuir sont des vortex longitudinaux qui apparaissent à la surface de la mer sous l'action du vent.



FIGURE 10.1 – Sillage d'avion instable devenant oscillant puis évoluant en anneaux de tourbillons (Instabilité de Crow).

### **10.2** Tableau donnant les propriétés de quelques instabilités

Le tableau 10.1 page ci-contre donne quelques paramètres caractérisant quelques grandes instabilités classiques.

Instabilité	Paramètre	Bifurcation	Déstabilisant	stabilisant	écoulement
Kelvin-Helmholtz		supercritique	cisaillement	gravité et capillarité	ouvert
Rayleigh-Taylor			gravité	capillarité	fermé
Rayleigh-Plateau			capillarité		ouvert
Kapitza	Ka		capillarité		ouvert
Bénard-Von Karman	$Re_c$	supercritique	cisaillement	viscosité	ouvert
Faraday	$\Gamma_c$	supercritique	accélération	viscosité	fermé
Saffman-Taylor	Ca		viscosité	capillarité	fermé
Rayleigh-Bénard	$Ra_c$	supercritique	dilatation	conductivité thermique	fermé
Bénard-Marangoni		supercritique	capillarité	conductivité thermique	fermé
Taylor-Couette	$Ta_c$	supercritique	centrifuge	viscosité	fermé
Dean	De		centrifuge		ouvert
Poiseuille	$Re_c$	souscritique	couche limite	viscosité	ouvert
Couette plan	$Re_c$	souscritique	couche limite	viscosité	ouvert
Stuart			couche limite		ouvert
Tollmien-Schlichting			couche limite		ouvert
Görtler			couche limite		ouvert
Crow					ouvert
Benjamin-Feir					ouvert
Mullins-Sekerka					ouvert
Richtmyer-Meshkov			gravité	capillarité	fermé
Ferrofluide			Champ magné.		ouvert
Belousov-Zhabotinsky			chimie		fermé
Flambage		supercritique	compression		
Anneau tournant		supercritique	centrifuge	gravité	

TABLE 10.1 – Petit catalogue des principales instabilités répertoriées et de leurs propriétés.

## Bibliographie

- [1] D.J. Acheson. Elementary Fluid Dynamics. Oxford, 1990.
- [2] C David Andereck, SS Liu, and Harry L Swinney. Flow regimes in a circular couette system with independently rotating cylinders. *Journal of fluid mechanics*, 164(3):155–183, 1986.
- [3] A. Arnéodo, Y. Couder, G. Grasseau, V. Hakim, and M. Rabaud. Uncovering the analytical Saffman-Taylor finger in unstable viscous fingering and diffusion-limited aggregation. *Phys. Rev Lett.*, 63 :984–987, 1989.
- [4] Kerstin Avila, David Moxey, Alberto de Lozar, Marc Avila, Dwight Barkley, and Björn Hof. The onset of turbulence in pipe flow. *Science*, 333(6039):192–196, 2011.
- [5] B. Abou, G. Néron de Surgy, and J.E. Wesfreid. Dispersion relation in a ferrofluid layer of any thickness and viscosity in a normal magnetic field; asymptotic regimes. J. Phys. II France, 7(8):1159–1171, 1997.
- [6] J. Bechhoefer, V. Ego, S. Manneville, and B. Johnson. An experimental study of the onset of parametrically pumped surface waves in viscous fluids. *J. Fluid Mech.*, 288 :325–350, 1995.
- [7] T.B. Benjamin and F. Ursell. The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. *Proc Royal Soc. of London*, A 225 :505–515, 1954.
- [8] P. Bergé, Y. Pomeau, and C. Vidal. Ordre dans le chaos. Hermann, 1998.
- [9] Boucif, M., Wesfreid, J.E., and Guyon, E. Role of boundary conditions on mode selection in a buckling instability. *J. Physique Lett.*, 45(9):413–418, 1984.
- [10] R. L. Bristol, J. M. Ortega, P. S. Marcus, and O. Savas. On cooperative instabilities of parallel vortex pairs. J. Fluid Mech., 517:331–358, 2004.
- [11] Pierre-Thomas Brun, Neil Ribe, and Basile Audoly. An introduction to the mechanics of the lasso. Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 470(2171) :20140512, 2014.
- [12] François Charru. Instabilités hydrodynamiques. EDP Sciences, 2007.
- [13] RL Chuoke, P Van Meurs, C\_ van der Poel, et al. The instability of slow, immiscible, viscous liquid-liquid displacements in permeable media. *Transactions of the AIME*, 216(01) :188–194, 1959.
- [14] H. Darcy. Les fontaines publiques de la ville de Dijon : distribution d'eau et filtrage des eaux. Victor Dalmont, Paris, 1856.
- [15] W. R. Dean. XVI. Note on the motion of fluid in a curved pipe. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 4(20) :208–223, 1927.
- [16] P. G. Drazin. Introduction to Hydrodynamic Stability. Cambridge University Press, 2002.

- [17] P. G. Drazin and W. H. Reid. *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
- [18] M. Van Dyke. An Album of Fluid Motion. Parabolic Press, 1982.
- [19] Michael Faraday. Xvii. on a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, (121) :299–340, 1831.
- [20] M. Fermigier, L. Limat, J. E. Wesfreid, P. Boudinet, and C. Quilliet. Two-dimensional patterns in Rayleigh-Taylor instability of a thin layer. J. Fluid Mech., 236:349–383, 1992.
- [21] M. Gaster. A note on the instability between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability. *J. Fluid Mech.*, 14:222–224, 1962.
- [22] E. Guyon, J. P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique physique*. EDP Sciences, 3ème edition, 2012.
- [23] H. J. S. Hele-Shaw. On the motion of a viscous fluid between two parallel plates. *Nature*, 58:34–36, 1898.
- [24] L. Landau and E. Lifchitz. Mechanics. Pergamon, 3rd edn. edition, 1976.
- [25] Paul Manneville. Instabilités, Chaos et Turbulence. Les éditions de l'Ecole polytechnique, 2004.
- [26] Frederic Moisy. Supercritical bifurcation of a spinning hoop. *American Journal of Physics*, 71:999, 2003.
- [27] William W Mullins and RF Sekerka. Stability of a planar interface during solidification of a dilute binary alloy. *Journal of applied physics*, 35(2):444–451, 1964.
- [28] C. W. Park and G. M. Homsy. Two-phase displacement in Hele-Shaw cells : theory. J. Fluid Mech., 139 :291–308, 1984.
- [29] P Petitjeans, JL Aider, and JE Wesfreid. Mass and momentum transport in longitudinal vortical structures in liquid flow example of görtler vortices. *Experiments in Fluids*, 23(5):388–394, 1997.
- [30] Osborne Reynolds. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Proceedings of the Royal Society of London*, 35(224-226) :84–99, 1883.
- [31] P. G. Saffman and G. I. Taylor. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous fluid. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 245 :312–329, 1958.
- [32] H. Schlichtling. Boundary Layer Theory. Springer, 8th edition, 2000.
- [33] Geoffrey Ingram Taylor. Viii. stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 223(605-615) :289–343, 1923.
- [34] William Thomson. XLVI. Hydrokinetic solutions and observations. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 42(281) :362–377, 1871.
- [35] SA Thorpe. Experiments on the instability of stratified shear flows : miscible fluids. J. Fluid Mech., 46(02) :299–319, 1971.
- [36] H. L. von Helmholtz. On discontinuous movements of fluids. Philos. Mag., 36:337, 1868.