



MASTER 1 DE MÉCANIQUE

COURS 2020-2021

ONDES ET ACOUSTIQUE DANS LES FLUIDES

Marc Rabaud

Laboratoire FAST, bât. Pascal, 91405 Orsay cedex
rabaud@fast.u-psud.fr



Louis Armstrong et sa trompette.

Table des matières

1	Acoustique dans les fluides	5
1.1	Equation d'onde de l'acoustique linéaire	6
1.1.1	Cas des ondes planes progressives monochromatiques (OPPM)	8
1.2	Célérité des ondes acoustiques dans les gaz parfaits	8
1.2.1	Mirages acoustiques	9
1.3	Energie acoustique	10
1.3.1	Densité d'énergie acoustique	10
1.3.2	Puissance acoustique (anciennement intensité acoustique)	11
1.3.3	Conservation de l'énergie acoustique	11
1.3.4	Pression acoustique	11
1.3.5	Sensibilité de l'oreille humaine	12
1.4	Propagation des ondes acoustiques	13
1.4.1	Impédance acoustique	13
1.4.2	Propagation à travers un dioptré acoustique : coefficient de réflexion et de transmission.	13
1.4.3	Atténuation des ondes acoustiques	15
1.5	Diverses sources acoustiques	16
1.5.1	Onde sphérique ou monopôle acoustique	16
1.5.2	Dipôle acoustique	16
1.5.3	Effet Doppler	17
1.5.4	Diffraction du son	17
1.6	Acoustique musicale	17
1.6.1	Tuyaux sonores	17
1.6.2	Temps de réverbération d'une salle	18
1.7	Ondes acoustiques dans les solides	18
1.8	Quelques questions possibles	19
1.9	Pour en savoir plus :	20
2	Les ondes de surface	21
2.1	Rappels sur les vitesses de phase et de groupe	22
2.2	Les ondes linéaires en eau profonde	22
2.2.1	Relation de dispersion des ondes entre deux fluides	23
2.2.2	Application aux ondes à la surface de l'eau	25
2.2.3	Paquet d'onde généré par un caillou jeté dans l'eau	27
2.2.4	Ondes en amont et en aval d'un obstacle	29
2.2.5	Le sillage en « V » ou sillage de Kelvin	29

2.2.6	Traînée de vague et vitesse limite de coque	33
2.2.7	Trajectoire des particules et lignes de courant sous la vague	34
2.2.8	Energie transportée par la houle	36
2.2.9	Atténuation des ondes de surface	38
2.3	Les ondes gravito-capillaires en eau peu profonde	39
2.3.1	Relation de dispersion en hauteur d'eau finie	39
2.3.2	Cas des ondes très longues	40
2.3.3	Ressaut hydraulique	42
2.3.4	Mascaret	43
2.4	Les ondes non-linéaires	44
2.4.1	Le soliton de Russel	45
	Bibliographie	47

Chapitre 1

Acoustique dans les fluides

Marc Rabaud, version du 7 novembre 2020.

Sommaire

1.1	Equation d'onde de l'acoustique linéaire	6
1.1.1	Cas des ondes planes progressives monochromatiques (OPPM)	8
1.2	Célérité des ondes acoustiques dans les gaz parfaits	8
1.2.1	Mirages acoustiques	9
1.3	Energie acoustique	10
1.3.1	Densité d'énergie acoustique	10
1.3.2	Puissance acoustique (anciennement intensité acoustique)	11
1.3.3	Conservation de l'énergie acoustique	11
1.3.4	Pression acoustique	11
1.3.5	Sensibilité de l'oreille humaine	12
1.4	Propagation des ondes acoustiques	13
1.4.1	Impédance acoustique	13
1.4.2	Propagation à travers un dioptré acoustique : coefficient de réflexion et de transmission.	13
1.4.3	Atténuation des ondes acoustiques	15
1.5	Diverses sources acoustiques	16
1.5.1	Onde sphérique ou monopôle acoustique	16
1.5.2	Dipôle acoustique	16
1.5.3	Effet Doppler	17
1.5.4	Diffraction du son	17
1.6	Acoustique musicale	17
1.6.1	Tuyaux sonores	17
1.6.2	Temps de réverbération d'une salle	18
1.7	Ondes acoustiques dans les solides	18
1.8	Quelques questions possibles	19
1.9	Pour en savoir plus :	20

Les ondes acoustiques (ou sonores dans le domaine audible) sont des ondes de pression (on peut les enregistrer avec un simple microphone et les observer sur un oscilloscope) et de densité. Elles se

propagent dans le volume du fluide (ou du solide) à cause d'une certaine élasticité de la matière et donc d'une compressibilité non nulle. Il n'y a pas besoin de forces externes pour qu'elles se propagent, contrairement aux ondes de surface gravito-capillaires, ou aux ondes internes (fluides stratifiés) ou aux ondes inertielles dans les fluides en rotation. Par contre elles ont besoin d'un support matériel pour pouvoir se propager contrairement aux ondes électromagnétiques. Nous verrons que ce sont des ondes longitudinales (et non transverses) et peu dispersives (toutes les ondes ont la même célérité). La figure 1.1 présente une simulation d'une onde de compression radiale générée par l'oscillation radiale d'une sphère (voir vidéo en ligne). On peut aussi observer cette propagation rapide d'une onde de compression sur un long ressort hélicoïdal (type "Slinky") après avoir généré une brusque compression localisée.

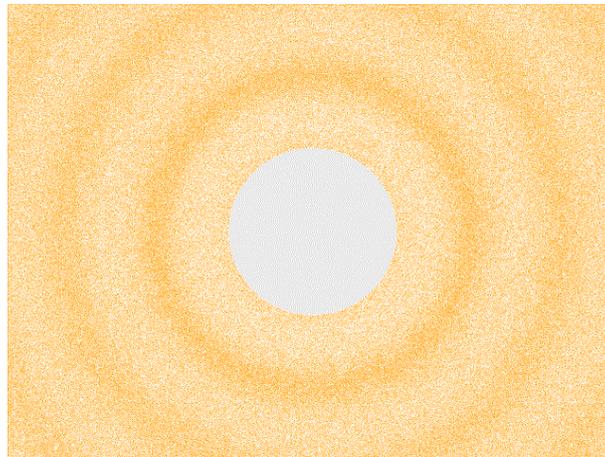


FIGURE 1.1 – Ondes acoustiques générées par une sphère oscillante. Les variations de densité sont très largement exagérées ! (<https://commons.wikimedia.org/wiki/Son>)

1.1 Equation d'onde de l'acoustique linéaire

Nous utiliserons les hypothèses suivantes :

1. Le fluide support de l'onde est au repos (sans écoulement hydrodynamique) avant l'arrivée des ondes sonores. La pression, masse volumique et température à l'équilibre thermodynamique (au repos) valent respectivement p_0 , ρ_0 , T_0 et ne dépendent donc pas de la position.
2. Il y a conservation de la masse du fluide, soit localement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.1)$$

3. Nous négligerons les forces volumiques (e.g. la force de gravité).
4. La dissipation est négligeable. Le son peut en effet se propager sur des distances grandes devant sa longueur d'onde, sans beaucoup perdre en amplitude. (La même hypothèse est faite pour les ondes de surface gravito-capillaires et conduit alors à un champ de vitesse irrotationnel).

5. Nous supposons que les ondes sont de faible amplitude (approximation linéaire : faible modification de la pression moyenne ou de la densité moyenne au passage de l'onde, faible vitesse hydrodynamique) et l'on introduit les petites corrections par rapport aux valeurs d'équilibre :

$$p(\vec{r}, t) = p_0 + p'(\vec{r}, t) \quad (1.2)$$

et

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \rho'(\vec{r}, t). \quad (1.3)$$

Dans ces conditions, l'équation d'Euler qui donne l'évolution de la vitesse fluide v induite par l'onde acoustique peut se linéariser et devient :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p'. \quad (1.4)$$

Au même ordre d'approximation, l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}) = 0. \quad (1.5)$$

Pour résoudre le problème il faut encore une équation, l'équation constitutive qui relie l'évolution de la masse volumique à la pression. Notons $p = f(\rho)$ cette équation, qui dépendra du milieu (solide, liquide ou gaz). En développant cette équation au premier ordre, $p = p_0 + \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} \rho'$, on obtient :

$$\boxed{p' = c^2 \rho'} \quad (1.6)$$

avec $c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho_0}$. Si c^2 est réel, les oscillations de pression et de masse volumique sont en phase. (Ce n'est pas forcément le cas pour les oscillations de la vitesse du fluide et de la pression, sauf pour des ondes planes.) Attention, il convient de bien définir la condition de dérivation (transformation isentropique, isotherme ou autres ...). Nous verrons que c'est en général une transformation isentropique (i.e. adiabatique réversible) $S = \text{Cste}$ qu'il convient de prendre. La quantité c sera la célérité des ondes acoustiques. On peut aussi introduire la **compressibilité isentropique** :

$$\chi_S = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S \quad (1.7)$$

et l'on a alors la relation :

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}}. \quad (1.8)$$

En prenant la divergence de l'Eq. 1.4 et la dérivée temporelle de l'Eq. 1.5 on peut éliminer la vitesse du fluide et obtenir une **équation d'onde** pour la pression :

$$\boxed{\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 p' = 0}. \quad (1.9)$$

On obtient la même équation d'onde pour la masse volumique (en utilisant l'Eq. 1.6) ou pour la vitesse (après un peu plus de calcul). Cette équation porte aussi le nom d'équation de d'Alembert.

Ces équations d'ondes admettent pour solution des ondes progressives, par exemple des ondes planes (mais pas uniquement) pour lesquelles la phase est constante dans un plan. Par exemple : $p' = p_1(x - ct) + p_2(x + ct)$. Les deux directions de propagation sont évidemment possibles.

L'expression de la célérité c (Eq. 1.8) ne dépendant pas du nombre d'onde, cela signifie que le milieu est **non dispersif** (toutes les fréquences ou longueurs d'ondes se propagent à la même vitesse), contrairement par exemple aux ondes gravito-capillaires qui se propagent à la surface d'un liquide. La vitesse de groupe est alors égale à la vitesse de phase : $v_g = v_\varphi = c$. Le fait qu'une conversation reste compréhensible même lorsqu'on s'éloigne de l'orateur est bien en accord avec le fait que les ondes sonores de différentes fréquences arrivent au niveau de l'auditeur avec les mêmes déphasages, donc que les ondes ne sont pas dispersives dans l'air.

Remarque : Ce n'est pas parce qu'une quantité se propage comme une onde qu'il existe forcément une équation d'onde sous-jacente pour cette quantité (e.g. cas des ondes de surface).

Questions :

1. A quelle condition peut-on négliger dans l'équation d'Euler son terme non linéaire devant le terme instationnaire ? On pourra introduire le nombre de Mach. Cette condition sera à vérifier a posteriori.
2. Justifier que l'on peut très raisonnablement négliger les forces volumiques dans l'équation 1.4.
3. Conditions pour qu'un écoulement fluide puisse être considéré comme incompressible. S'il existe des ondes acoustiques c'est que le milieu est compressible, mais les effets de compressibilité associés à ces ondes sont extrêmement faibles. Un écoulement hydrodynamique dans le fluide pourra raisonnablement être considéré comme incompressible si les variations de densité reste faible, i.e si $\Delta\rho/\rho_0 \ll 1$. En estimant un ordre de grandeur des variations de pression, montrer que cette condition est équivalente à la condition $v \ll c$.
4. Estimer ρ'/ρ_0 dans l'air pour une onde sonore dont le niveau sonore vaut 100 dB.

1.1.1 Cas des ondes planes progressives monochromatiques (OPPM)

Pour des ondes planes progressives et monochromatiques on peut écrire que toutes les variables évoluent proportionnellement à $\cos(kx - \omega t)$, où k est le nombre d'onde, x la direction de propagation, et ω la pulsation de l'onde. Pour toutes les expressions linéaires on peut utiliser la notation complexe $\exp i(kx - \omega t)$. La vitesse de phase est alors égale à la vitesse du son et l'on a donc : $\omega/k = c$.

Pour des OPPM, l'équation 1.4 donne

$$\boxed{p'(x, t) = \rho_0 c v(x, t)}. \quad (1.10)$$

Les oscillations de la vitesse sont donc en phase avec celles de la pression et de la densité. Ce n'est pas vrai dans le cas général, par exemple pour des ondes harmoniques, progressives mais sphériques.

1.2 Célérité des ondes acoustiques dans les gaz parfaits

Pour un gaz parfait $PV = nRT$, où n est le nombre de mole et R la constante des gaz parfaits ($R = \mathcal{N}_A k_B \approx 8,314 \text{ J/K/mol}$). En introduisant la masse molaire M , la masse volumique s'écrit $\rho = m/V = nM/V$ et on a donc la relation :

$$P = \rho \frac{RT}{M}. \quad (1.11)$$

Si le passage d'une onde sonore était un processus isotherme, la célérité des ondes sonores dans les gaz serait $c = \sqrt{\frac{RT}{M}}$, soit environ 288 m/s pour l'air dans les conditions normales, valeur nettement trop basse par rapport à l'expérience. En fait les transformations sont assez rapides et sont donc plutôt adiabatiques. La relation classique de la thermodynamique des gaz parfaits pour de telles transformations, $PV^\gamma = P_0V_0^\gamma$, conduit à la relation $P = P_0(\frac{\rho}{\rho_0})^\gamma$. Le paramètre $\gamma = c_p/c_v$ est le rapport des deux capacités calorifiques et vaut $\gamma \approx 7/5 = 1,4$ pour l'air sec (gaz parfait diatomique). La célérité de l'onde acoustique dans un gaz parfait s'écrit donc :

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT_0}{M}}. \quad (1.12)$$

La relation précédente nous montre que la célérité du son dans l'air ne dépend que de la température et pas de la pression de l'air. La vitesse du son dans l'air passe par exemple de 331,5 m/s à 0°C à 349,2 m/s à 30°C. Ainsi le "mur du son" ne correspond pas à la même vitesse pour un avion au voisinage du sol ou en altitude, mais pas parce que la pression décroît avec l'altitude mais parce que la température est plus faible en altitude.

La table 1.1, donne la relation entre fréquences acoustiques et longueurs d'onde dans l'air à 20°C. Par exemple la note "La 440" correspond à une longueur d'onde de 77 cm.

Fréquence (Hz)	1	20	200	2×10^3	20×10^3	2×10^6
Longueur d'onde (m)	340	17	1,7	0,17	17×10^{-3}	170×10^{-6}

TABLE 1.1 – Longueurs d'onde dans l'air pour différentes fréquences, des infrasons aux ultrasons. Les valeurs centrales (non grisées) correspondent aux fréquences audibles pour l'homme.

Quelques valeurs de célérité du son : à 20°, $c_{air} \approx 340$ m/s, $c_{He} \approx 1007$ m/s, à comparer à la célérité dans l'eau $c_{eau} \approx 1500$ m/s.

Questions :

1. La célérité du son dans un gaz est légèrement inférieure à la vitesse quadratique moyenne des molécules ($u^* = \sqrt{3 \frac{RT}{M}}$, relation qu'il faut savoir retrouver). Est-ce logique ? Dans l'eau ou dans les solides la célérité du son est nettement plus grande que u^* . Pourquoi ? Voir réponse dans le Walton [15] ou le Feynman [5].
2. L'hypothèse adiabatique réversible est-elle toujours vraie ? Pour répondre, comparer le temps de diffusion thermique sur une longueur caractéristique avec le temps de passage de l'onde. On donne la diffusivité thermique de l'air $D_{th} = 20 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Dans quel domaine de fréquence cette hypothèse peut-elle être éventuellement mise en défaut ? Pourquoi la diffusion thermique conduit-elle à une atténuation supplémentaire des ondes ?

1.2.1 Mirages acoustiques

En acoustique, comme en optique lorsque l'indice optique varie spatialement, on peut avoir des phénomènes de réfraction, i.e. de rotation des surfaces d'ondes. Cela peut conduire à des mirages acoustiques.

Questions :

1. **Notion de surface d'onde.** Dans l'air la célérité du son augmente avec la température (cf. Eq. 1.12). Décrire la propagation sonore dans le cas d'un sol chaud (en été) et d'un sol froid (en hivers) et en déduire qu'il est plus agréable (au niveau sonore :-)) de faire une sieste sur la plage en été qu'en hivers !
2. **Effet du vent sur la propagation des sons.** La vitesse du vent est le plus souvent très faible devant la célérité du son. Pourtant le vent à un effet important sur la portée des sons. Comment l'expliquer ? Dessiner le profil du vent dans la couche limite atmosphérique au-dessus du sol. En déduire l'effet sur la trajectoire des ondes sonores se propageant avec, ou contre, le vent. La première explication de ce phénomène est due à Stokes [11].
3. **Propagation guidée :** exemple de la communication des cétacés en mer. Il existe vers - 500 m une bande de minimum de vitesse du son, qui piège les sons par réfraction. Cela permet des communications à très grandes distances (plusieurs centaines de kilomètres) car le son se propage beaucoup mieux dans l'eau que dans l'air (moins de dissipation). Inversement il existe des profondeurs où la vitesse du son est maximum. Expliquer pourquoi ces profondeurs sont utilisées par les sous-marins pour éviter d'être détectés par les sonars ?
http://www.pourlascience.fr/ewb_pages/a/article-mirages-acoustiques-24883.php

1.3 Energie acoustique

1.3.1 Densité d'énergie acoustique

La densité d'énergie e (énergie par unité de volume) de l'onde acoustique est composée d'une contribution liée à l'énergie cinétique $e_c = \frac{1}{2}\rho_0 v^2$ et d'une contribution liée à l'énergie potentielle d'origine élastique $e_p = \frac{1}{2}\frac{p'^2}{\rho_0 c^2} = \frac{1}{2}\chi_S p'^2$. Démontrons le.

Ecrivons que la variation d'énergie par unité de temps dans un volume fixe est égale à la puissance (travail par unité de temps) des forces de pression sur les parois du volume :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V e d\tau = \iiint_V \frac{\partial e}{\partial t} d\tau = - \oiint_S p' \vec{v} \cdot d\vec{S} = - \iiint_V \operatorname{div} (p' \vec{v}) d\tau \quad (1.13)$$

soit au niveau local,

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\operatorname{div} (p' \vec{v}) = -p' \operatorname{div} (\vec{v}) - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p'$$

Les équations 1.5 et 1.6 nous permettent d'écrire : $\operatorname{div} (\vec{v}) = -\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p'}{\partial t}$. L'équation d'Euler (Eq. 1.4) multipliée par la vitesse particulière nous donne :

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} p' = -\frac{\rho_0}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t}$$

Soit finalement

$$\operatorname{div} (p' \vec{v}) = p' \operatorname{div} (\vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p' = -\frac{1}{2} \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p'^2}{\partial t} - \frac{\rho_0}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} = -\frac{\partial e}{\partial t}$$

Soit en intégrant :

$$\boxed{e = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{1}{2}\frac{p'^2}{\rho_0 c^2}} \quad (1.14)$$

Pouvez-vous expliquer pourquoi la constante d'intégration est nulle ?

La densité d'énergie potentielle e_p correspond au travail des forces de pression pour passer de l'état (ρ_0, p_0) à l'état $(\rho_0 + \rho', p_0 + p')$. Pour le retrouver on peut aussi écrire que $de_p = -p' dV/V$.

Question : Pour une onde plane, montrer que $e_c(x, t) = e_p(x, t)$, et que donc les deux densités d'énergie oscillent en phase.

1.3.2 Puissance acoustique (anciennement intensité acoustique)

On définit la puissance acoustique comme le produit de la pression acoustique instantanée p' par la vitesse particulaire :

$$\boxed{\vec{\pi}_a = p' \vec{v}} \quad (1.15)$$

Cette quantité représente la puissance (travail par unité de temps) des forces de pression par unité de surface (voir Eq. 1.13). Attention, cette puissance acoustique est un vecteur ! Elle joue le même rôle que le vecteur de Poynting en électromagnétisme. Elle est dirigée dans la direction de propagation et caractérise le flux d'énergie.

La puissance \mathcal{P}_p des forces de pression qui traverse une surface \mathcal{S} quelconque s'écrit :

$$\mathcal{P}_p = \iint_{\mathcal{S}} p' \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{\pi}_a \cdot d\vec{S}. \quad (1.16)$$

C'est le flux du vecteur puissance acoustique à travers la surface. La puissance acoustique $\vec{\pi}_a$ s'exprime donc en Watt par m². Pour des OPPM, comme $p' = \rho_0 cv$, on obtient l'égalité : $\pi_a = ce = \rho_0 cv^2 = \frac{p'^2}{\rho_0 c}$.

1.3.3 Conservation de l'énergie acoustique

En utilisant le vecteur puissance acoustique, la conservation de l'énergie (Eq. 1.13) s'écrit :

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\pi}_a \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} e d\tau = 0. \quad (1.17)$$

On obtient donc l'écriture locale de la conservation de l'énergie :

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div}(\vec{\pi}_a) = 0}. \quad (1.18)$$

1.3.4 Pression acoustique

Comme la pression dépend du temps on définit la "pression acoustique" comme la pression efficace :

$$P_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T p'^2(t) dt}, \quad (1.19)$$

en prenant la limite à grand temps pour un signal quelconque ou la période temporelle pour un signal périodique. C'est donc la valeur RMS de la pression. Pour une onde monochromatique on obtient : $P_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} p'_{max}$.

1.3.5 Sensibilité de l'oreille humaine

L'oreille humaine, dont les différents éléments sont représentés sur la Fig. 1.2, perçoit les sons dans la gamme de fréquence 20 Hz - 20 kHz environ. Environ car cela dépend des personnes et en particulier de leur âge (perte des aigus en premier). Au-dessous de 20 Hz on parle d'infrasons et au-delà de 20 kHz d'ultrasons (Fig. 1.3 et Table 1.1).

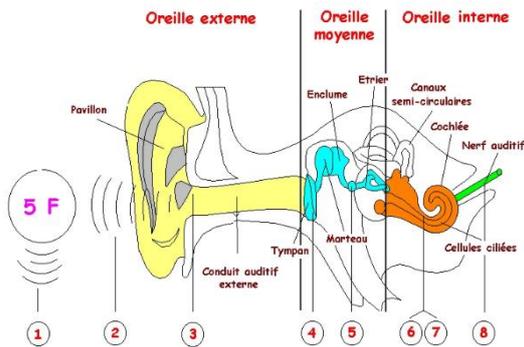


FIGURE 1.2 – Schéma des différentes parties de l'oreille humaine (<https://www.coquelicot.asso.fr/surdite>).

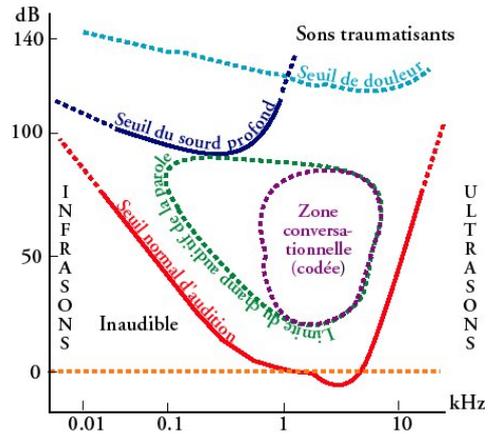


FIGURE 1.3 – Audiogramme représentant dans un plan énergie/fréquence les différents zones de l'audition humaine (<https://www.coquelicot.asso.fr/surdite>).

Pour mesurer les niveaux sonores, on les compare usuellement à une pression acoustique de référence, la limite d'audition à 1 kHz : $P_{ref} = 2 \times 10^{-5}$ Pa. Cette pression correspond donc à une puissance de référence dans l'air $\pi_{ref} = 10^{-12}$ W/m². C'est l'une des rares échelles logarithmiques utilisées (avec l'échelle de Richter en sismologie ...), utile car la sensibilité de l'oreille est plutôt logarithmique. Heureusement car sinon, soit on ne pourrait entendre un murmure, soit on ne pourrait supporter un bruit un peu fort comme celui d'une moto. Vous trouverez plus de détails sur le fonctionnement assez subtil de l'oreille interne, de la cochlée et de son rôle de filtre actif sur le site <http://www.cochlea.eu/cochlee/fonctionnement>.

On définit un **niveau sonore** (SPL pour Sound Pressure Level) en décibel N_{dB} par :

$$N_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{\pi_{eff}}{\pi_{ref}} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{P_{eff}}{P_{ref}} \right). \quad (1.20)$$

Décibel (dB)	0	20	100
Pression (Pa)	2×10^{-5}	2×10^{-4}	2
v (m/s) à 1 kHz	60×10^{-9}	$0,6 \times 10^{-6}$	6×10^{-3}
Amplitude de déplacement à 1 kHz (m)	60×10^{-12}	$0,6 \times 10^{-9}$	6×10^{-6}

TABLE 1.2 – Quelques ordres de grandeurs pour différentes puissances acoustiques.

L'oreille humaine distingue assez mal les différences de puissance sonore (± 3 dB, soit 30% en pression). Elle est par contre assez sensible au changement de fréquence, et certains musiciens arrivent à distinguer le dixième de ton, soit une variation relative de fréquence de 2 %.

Questions :

1. Calculer la sensibilité en déplacement au seuil d'audition de l'oreille. Elle est impressionnante, mais elle reste toutefois largement inférieure à la sensibilité des détecteurs d'ondes gravitationnelles Virgo et Ligo (10^{-19} m)!
2. Sensibilité directionnelle aux sons. Comment fonctionne notre perception de la direction d'un son ? A-t-on la même perception pour des sons graves ou aigus ? Pourquoi ?

1.4 Propagation des ondes acoustiques

1.4.1 Impédance acoustique

L'impédance acoustique est une quantité qui va permettre de caractériser la transmission et la réflexion des ondes acoustiques à travers une surface. Elle est définie par la relation :

$$Z = \frac{p'}{\vec{v} \cdot \vec{n}} \quad (1.21)$$

où \vec{n} est la normale à la surface. (L'équation 1.21 définit plus précisément l'impédance acoustique spécifique car il existe d'autres définitions en particulier pour la propagation dans des conduits acoustiques).

Quelle est l'unité d'impédance acoustique ?

L'impédance acoustique permet de calculer l'angle de réfraction d'une onde acoustique à l'interface entre deux milieux et l'énergie transmise à travers cette interface (cf § 1.4.2).

Dans le cas d'onde plane progressive monochromatique (OPPM), se propageant dans le sens des x croissant, on a : $p' = \rho_0 c v$. On obtient donc $Z = \rho_0 c$ et la pression acoustique s'écrit alors $p' = Z v$. Dans le cas d'une onde se propageant dans la direction des x décroissant, $Z = -\rho_0 c$. Pour d'autres types d'ondes, pression et vitesses peuvent être déphasées, ce qui conduit à une impédance complexe, comme pour l'impédance électrique.

Par exemple pour l'air on trouve $Z_a = 415 \text{ kg/m}^2/\text{s}$ à 20°C et $Z_e = 1.48 \times 10^6 \text{ kg/m}^2/\text{s}$ pour l'eau. Dans le cas d'un mur très lourd, la vitesse normale du déplacement à la paroi sera pratiquement nulle et l'impédance sera infinie.

Dans un volume d'air, si on diminue la pression, $c = \text{Cste}$ car la célérité ne dépend que de la température mais ρ_0 décroît donc l'impédance décroît (e.g. expérience de la sonnette dans une cloche à vide, la puissance sonore décroît progressivement lorsqu'on baisse la pression).

1.4.2 Propagation à travers un dioptre acoustique : coefficient de réflexion et de transmission.

Nous décrivons ici seulement le cas d'une incidence normale (Fig. 1.4). Pour une onde arrivant en biais, les calculs sont tout-à-fait similaires aux calculs des coefficients de Fresnel en optique. L'impédance acoustique, proportionnelle à la célérité de l'onde pour des OPPM, à le même rôle que l'inverse de l'indice optique pour les lois de la réfraction (Snell-Descartes).

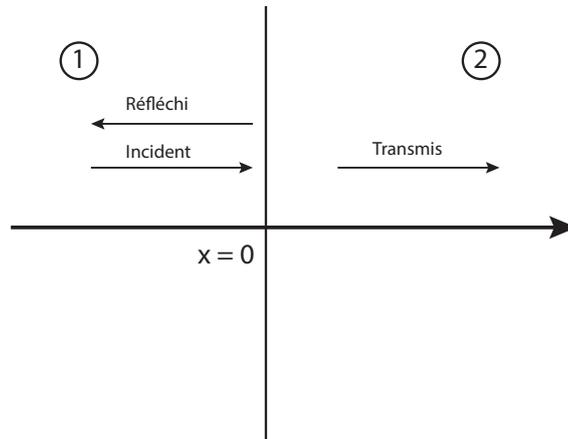


FIGURE 1.4 – Schéma d'un dioptré plan acoustique pour une onde incidente se propageant dans le milieu 1 dans le sens des x croissants.

À l'interface il faut respecter les conditions de passage cinématique (égalité des vitesses normales) et dynamique (continuité de la pression). Si la paroi est immobile (ou plutôt si elle vibre légèrement à la fréquence de l'onde) il n'y a pas d'effet Doppler, et la fréquence de l'onde est conservée. Si la célérité de l'onde est différente dans chacun des milieux, la longueur d'onde va changer pour l'onde transmise mais pas la fréquence.

On note p_i , p_t et p_r les pressions acoustiques pour les ondes incidente, transmise et réfléchie (sans "prime" pour simplifier les notations) et de même pour les vitesses normales u_i , u_t et u_r . Attention, sauf si les deux milieux ont la même impédance, il y a toujours une onde réfléchie dont il faut tenir compte.

Les conditions aux limites à l'interface s'écrivent : $p_i + p_r = p_t$ et $u_i + u_r = u_t$.

Le coefficient de transmission de la pression s'écrit $t = p_t/p_i$ et $r = p_r/p_i$. En introduisant l'impédance des deux milieux on a, en tenant compte de la direction de propagation : $u_i = p_i/Z_1$, $u_t = p_t/Z_2$ et $u_r = -p_r/Z_1$, où le signe moins vient du changement de direction de propagation.

À partir de ces relations et des deux conditions de continuité on trouve facilement pour les coefficients de la pression :

$$t = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \text{ et } r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \text{ (} r \text{ peut être négatif).}$$

Il est plus intéressant de calculer les coefficients de transmission de l'énergie (donc de la puissance acoustique) $T = |\pi_t|/|\pi_i|$ et $R = |\pi_r|/|\pi_i|$.

On trouve :

$$R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 \quad (1.22)$$

$$T = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2} \quad (1.23)$$

L'énergie est bien conservée puisque $R + T = 1$. Plus les impédances sont proches, mieux l'onde

acoustique est transmise. Inversement, plus ils sont différents ($Z_1/Z_2 \rightarrow 0$ ou $Z_2/Z_1 \rightarrow 0$) plus le coefficient de réflexion tend vers 1. Ces coefficients sont parfois donnés en décibel.

En échographie, les images sont obtenues en utilisant la réflexion des ondes ultrasonores sur des tissus ayant des impédances acoustiques différentes (https://en.wikipedia.org/wiki/Medical_ultrasound).

Comme en électromagnétisme il est utile d'adapter les impédances si l'on veut bien transmettre l'énergie et ne pas tout réfléchir et inversement il faut bien différencier les impédances si on veut faire de l'isolation phonique (cas des doubles vitrages).

Si le coefficient de réflexion est élevé, et si deux parois sont en face-à-face, on observera des ondes stationnaires lorsque l'écartement sera un multiple de la moitié de la longueur d'onde. Ce phénomène est à la base du fonctionnement de la plupart des instruments à vent.

Questions :

1. Montrer que l'impédance acoustique joue un rôle similaire à l'indice optique pour la réfraction des ondes lumineuses.
2. Peut-il y avoir une onde réfléchi même si la célérité est identique dans les deux milieux ?
3. Estimer la résolution spatiale d'une échographie pour une fréquence de 5 MHz. La vitesse du son dans le corps humain est de l'ordre de 1500 m/s. On donne l'impédance acoustique de l'air ($Z_a = 413 \text{ kg/m}^2/\text{s}$) et de la peau ($Z_p = 1.64 \times 10^6 \text{ kg/m}^2/\text{s}$). Estimer le coefficient de transmission T et expliquer pourquoi on doit utiliser un gel entre la sonde et la peau, gel dont l'impédance est proche de celle de la peau.

1.4.3 Atténuation des ondes acoustiques

Nous avons jusqu'à maintenant négligé la dissipation d'énergie. Mais le son s'atténue pourtant avec la distance. Il peut y avoir une première raison géométrique : si on considère une source sonore localisée, l'énergie se répartit sur une surface de plus en plus grande lorsqu'on s'éloigne de la source. Mais il existe aussi une dissipation intrinsèque due à la viscosité du fluide, surtout à haute fréquence.

Ecrivons l'équation de Navier-Stokes linéarisée pour une onde acoustique dans un fluide newtonien compressible :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p' + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta\right) \vec{\nabla} [\text{div}(\vec{v})]. \quad (1.24)$$

L'existence d'une compression au passage de l'onde induit une dissipation d'énergie (l'effet de la seconde viscosité ζ n'est pas bien connu, voir explication du Landau [8]). Pour des ondes planes, dimensionnellement, on obtient un temps caractéristique d'atténuation $\tau = (2\nu k^2)^{-1}$, soit une distance typique d'atténuation de l'amplitude $L = c\tau = \frac{c^3}{2\nu\omega^2}$. Cette effet peut devenir mesurable pour les hautes fréquences et les ultrasons. A.N. Pour une fréquence de 1 kHz, cette formule donne une distance typique d'atténuation dans l'air de 33 km, mais 300 m pour 10 kHz. L'effet est facilement dominé par l'amortissement géométrique en $1/r^2$ pour une source ponctuelle.

L'humidité de l'air peut aussi être un facteur significatif d'amortissement, mais aussi les l'absorption par les parois (c'est tout le domaine de l'acoustique des salles, de la mesure des temps de réverbération, etc...).

1.5 Diverses sources acoustiques

Le son peut-être généré directement dans le fluide par l'écoulement hydrodynamique, s'il est suffisamment intense (turbulent), et surtout si la vitesse de l'écoulement commence à s'approcher de la vitesse du son. Nous n'étudierons pas ici ce cas car nous avons supposé le fluide au repos. La source et le récepteur seront donc des objets solides.

1.5.1 Onde sphérique ou monopôle acoustique

L'exemple le plus simple de source sonore est une sphère oscillante (voir animation de la figure 1.1). Le rayonnement sonore est alors isotrope et il décroît rapidement avec la distance. En coordonnées sphériques, l'équation de d'Alembert s'écrit pour $p'(r, t)$:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rp') = 0. \quad (1.25)$$

Soit encore

$$\frac{\partial^2 (rp')}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rp') = 0. \quad (1.26)$$

c'est-à-dire que la fonction rp' est solution d'une équation d'onde 1D. La solution générale pour l'incrément de pression s'écrit $p' = \frac{1}{r} f_+(r - ct) + \frac{1}{r} f_-(r + ct)$. La première fonction décrit une onde rayonnée vers l'infini, l'autre sa retournée temporelle qui viendrait de l'infini et convergerait vers l'origine. Si on calcule le champ de vitesse associé à l'onde divergente grâce à l'équation 1.4, on obtient :

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho_0 c} \left[\frac{1}{r} f_+(r - ct) - \frac{1}{r^2} F_+(r - ct) \right] \vec{e}_r \quad (1.27)$$

où F est la primitive de f . Pour la vitesse on a donc une contribution de champ proche (F) et une contribution de champ lointain. On montre alors sans difficulté que la puissance acoustique décroît en champ lointain comme $1/r^2$.

Question : A partir de quelle distance peut-on commencer à négliger la contribution de champ proche? Comment varie ensuite la puissance acoustique avec la distance? Pouvait-on le prédire plus simplement? Montrer qu'en champ proche p' et \vec{v} sont déphasés.

1.5.2 Dipôle acoustique

Deux sources proches en opposition de phase constituent un dipôle. Le champ rayonné est fortement anisotrope et le champ décroît rapidement. Les calculs sont équivalents à ceux du dipôle électrique. S'il n'y a pas de terme monopolaire le terme dipolaire peut être le terme dominant. Si ce terme dipolaire est aussi nul en champ lointain, le terme dominant sera le terme suivant du développement, le terme quadripolaire.

Question : Un diapason une fois frappé émet-il un son dipolaire ou quadripolaire?

1.5.3 Effet Doppler

La vitesse du son n'étant pas très élevée comparée aux vitesses possibles pour les sources ou les récepteurs, les effets de mouvement relatif peuvent être significatifs sur la fréquence des sons reçus (e.g. cas d'une ambulance faisant fonctionner son avertisseur et passant sur une route à côté de l'observateur).

Application en échographie. L'effet Doppler permet de mesurer la vitesse des écoulements sanguins.

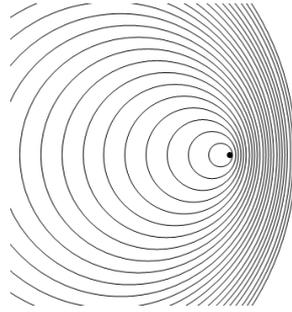


FIGURE 1.5 – Schéma des ondes sonores émises par source en mouvement à une vitesse légèrement inférieure à la vitesse du son dans le milieu, et émettant des ondes circulaires. À l'avant de la source les longueurs d'ondes sont plus courtes et la fréquence plus élevée, derrière c'est l'inverse.

Dans le cas du fluide au repos, si la source sonore (qui émet à la fréquence f_{em}) avance à la vitesse v_{em} et si le récepteur avance dans la même direction à la vitesse v_{rec} , ce récepteur mesurera une fréquence f_{rec} donnée par la relation :

$$f_{rec} = \frac{c - v_{rec}}{c - v_{em}} f_{em}. \quad (1.28)$$

Questions :

1. Vérifier que la formule 1.28, prédit la bonne variation de fréquence pour le son émis par un moto passant rapidement à côté de vous.
2. Pourquoi ce n'est finalement pas la différence des vitesses ($v_{em} - v_{rec}$) qui apparaît dans l'équation 1.28 ?
3. Expliquer le passage du mur du son pour un avion en utilisant l'effet Doppler.

1.5.4 Diffraction du son

En comparant les longueurs d'ondes audibles et les longueurs d'ondes visibles, expliquer pourquoi la diffraction du son est un phénomène important dans la vie de tous les jours. Décrire la notion de lobe d'émission par exemple.

1.6 Acoustique musicale

1.6.1 Tuyaux sonores

On parle de propagation guidée, caractérisées par des superpositions d'ondes contrapropagatives et des modes stationnaires. Si les dimensions transverses sont petites devant la longueur d'onde, la

phase reste constante dans un plan. Sinon il faut définir les modes (m, n) transverses. Dans la longueur du tuyau on obtient un nombre entier de demi longueur d'ondes à cause des conditions aux extrémités du tube. Quelles sont les conditions aux limites aux extrémités ? Une paroi solide est une noeud pour la vitesse et un ventre pour la pression. Pour une extrémité libre c'est l'inverse. (Voir figure 1.6 issue de https://fr.wikipedia.org/wiki/Onde_stationnaire_dans_un_tuyau).

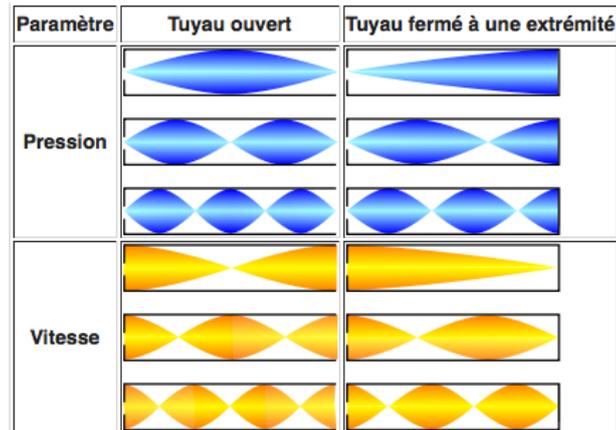


FIGURE 1.6 – Noeuds et ventres de vibration de la pression et de la vitesse dans des tuyaux ouverts ou fermés.

Voir problème d'Agrégation de physique de 2009. Discuter le rôle du pavillon en sortie de certains instruments à vent.

1.6.2 Temps de réverbération d'une salle

On définit le temps de réverbération RT60, comme le temps nécessaire pour que le niveau sonore dans un lieu clos diminue de 60 dB par rapport à son niveau initial. Ce temps est essentiellement contrôlé par les coefficients de réflexion sur les parois de la salle.

1.7 Ondes acoustiques dans les solides

Dans les solides, il n'existe pas seulement des ondes acoustiques longitudinales (dites ondes "P" en sismologie, pour Primaires car elles voyagent plus vite que les autres), mais aussi des ondes de cisaillement (S pour secondaires ou pour Shear), représentées sur la figure 1.7. Dans les liquides ou les gaz ces ondes S n'existent pas et il existe juste des ondes évanescentes près de la source induites par la viscosité (atténuation sur une longueur de diffusion $\delta = \sqrt{\nu/f}$, voir exercice de la plaque oscillante). Pour les solides les célérités des ondes P et S sont données par les relations :

$$c_P = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho_0(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (1.29)$$

$$c_S = \sqrt{\frac{E}{2\rho_0(1+\nu)}} \quad (1.30)$$

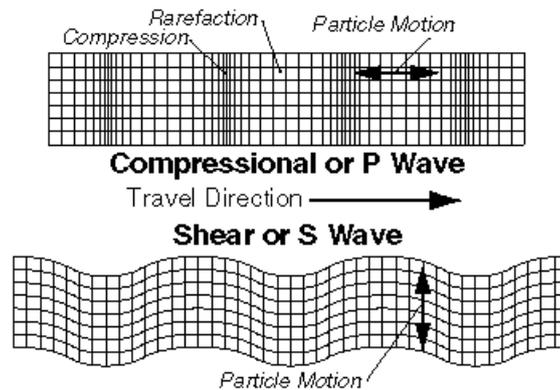


FIGURE 1.7 – Schéma d'une onde P et d'une onde S dans un solide.

où E est le module d'Young et ν le coefficient de Poisson. Vérifier que $c_P > c_S$.

Pour la propagation du son dans les solides on peut utiliser l'analogie d'une ligne de masses couplées par des ressorts. A l'intérieur de la Terre les ondes P ont une vitesse de l'ordre de 10 km/s, les ondes S une vitesse moitié environ.

NB : A la surface des solides il peut exister d'autres types d'ondes (Ondes de Rayleigh, de Love...), comme il peut exister des ondes de surface gravito-capillaires à la surface d'un liquide.

Question : Si $c_P/c_S \approx 1,5$, en déduire le coefficient de Poisson du matériaux.

1.8 Quelques questions possibles

1. Peut-on fabriquer des lentilles acoustiques ? Des miroirs acoustiques ? Quelle est la limite de diffraction ? Quelles différences finalement avec l'optique géométrique ?
2. L'impédance acoustique est-elle l'équivalent de l'impédance électrique ?
3. Les effets de la viscosité du fluide sont-ils plus notables à basse ou haute fréquence ? Estimer l'atténuation du son. Comment dépend-elle de la fréquence. (Voir Landau [8].)
4. Pourquoi parle-t-on avec une voix de canard dans l'hélium ?
5. Comment les ondes dans les solides ou les liquides peuvent-elles se propager plus vite que la vitesse quadratique moyenne de leurs molécules ? (Voir Walton [15]).
6. Quelle différence existe-t-il entre un écoulement incompressible et un fluide incompressible ?
7. L'hypothèse adiabatique pour calculer la compressibilité est-elle toujours raisonnable ?
8. Pour l'isolation phonique des fenêtres, vaut-il mieux des doubles vitrages ou bien seule importe l'épaisseur totale du verre ?
9. Quelle doit-être la vitesse d'un ambulance pour que sa sirène change d'un ton lorsqu'elle passe à coté de vous ?
10. Expliquer l'effet du vent sur la propagation du vent. Que peut-il se passer si le vent augmente avec l'altitude ?
11. Pourquoi certains instruments à vent ont-ils un pavillon exponentiel en sortie du tube, et d'autres non ?

12. Comment expliquer le changement de hauteur du son émis par une cuillère frappant le fond d'une tasse de café que l'on vient de préparer.

1.9 Pour en savoir plus :

- Pour la Science, Décembre 1984, Tomographie sismique.
- Pour la Science, Avril 1990, Le traitement du son dans l'oreille interne.
- Vidéo d'une simulation d'une source sonore sphérique https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spherical_pressure_waves.gif.
- Vidéo "Aerodynamics Generation of Sound" <http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html>.
- [1] A. Chaigne, *Ondes acoustiques*, Les éditions de l'école polytechnique, 2011.
- [2] A. Chaigne et J. Kergomard, *Acoustique des instruments de musique*, Belin, 2008.
- [8] L. D. Landau and E. M. Lifchitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon, New-York, 1963.
- [5] R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. *Le cours de physique de Feynman*. Dunod, 2013.
- [15] A. J. Walton. *Three phases of matter*. Oxford University Press, 1983.
- [14] J. Walker. *Le carnaval de la physique*. Dunod, 1980.
- [11] J. W. S. Rayleigh. *The theory of sound*. vol. 1 et 2. 1877.

Chapitre 2

Les ondes de surface

Marc Rabaud, version du 7 novembre 2020

Sommaire

2.1	Rappels sur les vitesses de phase et de groupe	22
2.2	Les ondes linéaires en eau profonde	22
2.2.1	Relation de dispersion des ondes entre deux fluides	23
2.2.2	Application aux ondes à la surface de l'eau	25
2.2.3	Paquet d'onde généré par un caillou jeté dans l'eau	27
2.2.4	Ondes en amont et en aval d'un obstacle	29
2.2.5	Le sillage en « V » ou sillage de Kelvin	29
2.2.6	Traînée de vague et vitesse limite de coque	33
2.2.7	Trajectoire des particules et lignes de courant sous la vague	34
2.2.8	Energie transportée par la houle	36
2.2.9	Atténuation des ondes de surface	38
2.3	Les ondes gravito-capillaires en eau peu profonde	39
2.3.1	Relation de dispersion en hauteur d'eau finie	39
2.3.2	Cas des ondes très longues	40
2.3.3	Ressaut hydraulique	42
2.3.4	Mascaret	43
2.4	Les ondes non-linéaires	44
2.4.1	Le soliton de Russel	45
	Bibliographie	47

Nous allons ici nous intéresser aux ondes se propageant à l'interface entre deux liquides ou entre un liquide et un gaz, propagation causée par deux forces de rappel : la gravité et la tension de surface entre les deux fluides. Nous étudierons tout d'abord le cas des ondes en eau profonde puis le cas des ondes en eau peu profonde.

Comme toute déformation périodique ou localisée peut se décomposer en série de Fourier, nous étudierons d'abord le comportement d'onde plane monochromatique. La déformation de l'interface s'écrit alors $\zeta(x, t) = \zeta_0 \cos(kx - \omega t)$. Le nombre d'onde est $k = 2\pi/\lambda$ où λ est la longueur d'onde. L'amplitude de l'onde est ζ_0 . La vitesse de phase est donnée par $v_\varphi = \omega/k$ et la vitesse de groupe par $v_g = \partial\omega/\partial k$.

Pour une bonne introduction sur les ondes, lire le premier chapitre de la Ref. [10].

2.1 Rappels sur les vitesses de phase et de groupe

On considère tout d'abord une onde plane monochromatique qui s'écrit :

$$\zeta(x, t) = \Re [A_0 \exp i(k_0 x - \omega(k_0)t)],$$

où \Re exprime la partie réelle. Son spectre est une fonction de Dirac $A_0 \delta(k - k_0)$, sa vitesse de phase $v_\varphi = \omega(k_0)/k_0$. En effet c'est la vitesse à laquelle il faut que x augmente pour que la phase de l'onde, $\varphi(x, t) = k_0 x - \omega(k_0)t = k_0(x - \frac{\omega(k_0)}{k_0}t)$, reste constante.

Si maintenant on est en présence d'un *paquet d'onde*, l'onde s'écrit :

$$\zeta(x, t) = \Re \int_0^\infty A(k) \exp i(kx - \omega(k)t) dk.$$

Si le paquet d'onde est étroit (dans l'espace de Fourier) autour de k_0 , on peut écrire $k = k_0 + \delta k$ soit :

$$\zeta(x, t) = \Re \int_0^\infty A(k_0 + \delta k) \exp i(k_0 x - \omega(k_0)t) \exp i(\delta k x - \delta \omega t) dk.$$

Où $\delta \omega = \omega(k_0 + \delta k) - \omega(k_0) \approx \frac{\partial \omega}{\partial k} \delta k = v_g \delta k$.

A l'instant initial $t = 0$ on a :

$$\zeta(x, 0) = \Re \exp i(k_0 x) F(x)$$

avec

$$F(x) = \int_0^\infty A(k_0 + \delta k) \exp i(\delta k x) dk.$$

C'est donc un paquet d'onde avec une porteuse k_0 et une enveloppe $F(x)$.

Pour $t \neq 0$:

$$\zeta(x, t) = \Re \exp i [k_0(x - v_\varphi t)] F(x - v_g t)$$

avec

$$F(x - v_g t) = \int_0^\infty A(k_0 + \delta k) \exp i [\delta k(x - v_g t)] dk.$$

L'enveloppe du paquet d'onde se propage bien sans changer de forme avec la vitesse de groupe v_g alors que la porteuse se propage à v_φ (voir figure 2.1).

Nota : on peut généraliser à des ondes tridimensionnelles où $\vec{k} = (k, l, m)$. Dans ce cas la vitesse de phase s'écrit $\vec{v}_\varphi = (\omega/k^2)\vec{k}$ (elle est par définition colinéaire au vecteur d'onde) et la vitesse de groupe $\vec{v}_g = (\partial\omega/\partial k, \partial\omega/\partial l, \partial\omega/\partial m)$. Ces deux vitesses ne sont pas forcément colinéaires si la relation de dispersion n'est pas isotrope et même elles peuvent être perpendiculaires entre elles si la relation de dispersion ne dépend pas du module de \vec{k} comme nous le verrons pour les ondes internes (chap. ?? page ??) ou les ondes inertielles (§ ?? page ??).

2.2 Les ondes linéaires en eau profonde

Nous considérerons ici uniquement le cas des ondes linéaires, c'est-à-dire d'amplitude faible devant la longueur d'onde : $\zeta_0 \ll \lambda$ ou $\zeta_0 k \ll 1$.

On note 1 le fluide inférieur et 2 le fluide supérieur et Oz l'axe vertical (figure 2.2).

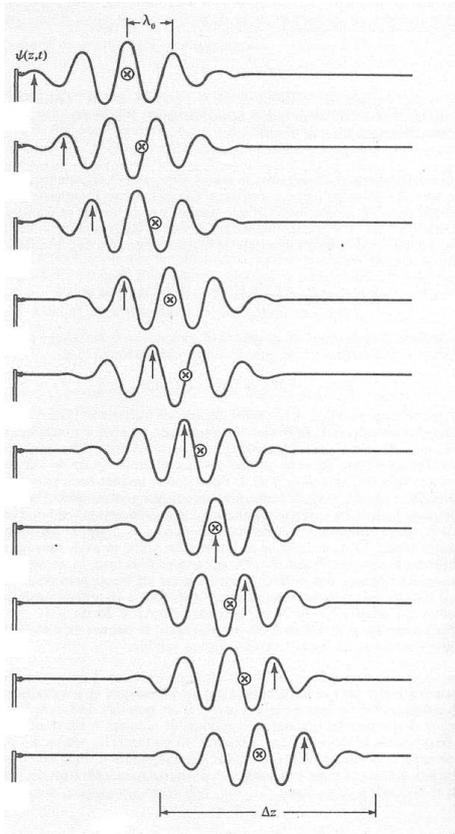


FIGURE 2.1 – Evolution d'un paquet d'onde dont la vitesse de phase est le double de la vitesse de groupe (cas des ondes de gravité). La croix marque le milieu du paquet d'onde qui se déplace à la vitesse de groupe, la flèche suit un maximum local de l'onde et se déplace à la vitesse de phase (cours Berkeley III, p. 294).

2.2.1 Relation de dispersion des ondes entre deux fluides

On supposera les fluides incompressibles et surtout l'écoulement irrotationnel. En effet si on considère un fluide immobile (donc forcément irrotationnel) avant l'arrivée des vagues, il doit rester irrotationnel, au moins à court terme et loin des parois (la vorticité est éventuellement présente sur le fond ou à l'interface si les fluides sont visqueux). En négligeant l'effet de la viscosité, nous étudierons la propagation des ondes sans att nuation¹.

Si l'écoulement dans chaque fluide est irrotationnel, $\vec{\text{rot}} \vec{v}_i = \vec{0}$ (avec $i = 1, 2$) et l'on peut écrire $\vec{v}_i = \vec{\nabla} \Phi_i$, le champ de vitesse dérive d'un potentiel. Si de plus l'écoulement est incompressible,

1. Un fluide parfait ne peut donc pas satisfaire les relations de Kramer-Krönig entre dissipation et dispersion.

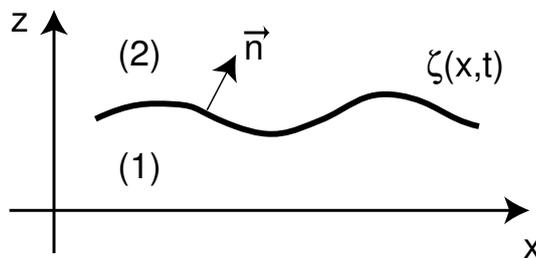


FIGURE 2.2 – Schéma de l'interface entre deux fluides superposés.

$\text{div } \vec{v}_i = 0$ et donc $\Delta \Phi_i = 0$. Le potentiel des vitesses satisfait l'équation de Laplace.

En recherchant des solutions périodiques progressives dans la direction des x croissants on peut écrire : $\Phi_i = f_i(z) \exp i(kx - \omega t)$. Les ondes étant supposées linéaires, nous pouvons utiliser la notation complexe sans problème en prenant à la fin des calculs la partie réelle du résultat.

L'équation de Laplace impose que :

$$f_i'' - k^2 f_i = 0,$$

soit

$$f_i(z) = A_i \exp(kz) + B_i \exp(-kz).$$

Dans le cas de milieux infinis au-dessus et au-dessous de l'interface, la condition de non divergence de f_i pour $z \rightarrow \pm\infty$ donne $A_2 = B_1 = 0$. (Le cas d'une profondeur finie sera traité au paragraphe 2.3.)

L'équation d'Euler doit être satisfait pour chaque fluide :

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + (\vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_i = -\frac{1}{\rho_i} \vec{\nabla} p_i + \vec{g}.$$

Le terme convectif non-linéaire peut-être négligé si $(\vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_i \ll \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t}$. On peut estimer l'ordre de grandeur de ces deux termes car $v_i \sim \zeta_0/T$, la condition devenant $k \zeta_0/T \ll 1/T$ soit $\zeta_0 k \ll 1$ ce qui correspond bien a notre choix d'ondes de faible amplitude devant la longueur d'onde.

L'équation devient

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \Phi_i + \frac{1}{\rho_i} \vec{\nabla} p_i - \vec{g} = 0,$$

soit :

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \frac{p_i}{\rho_i} + gz \right) = 0,$$

et finalement :

$$p_i = -\rho_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} - \rho_i gz + C_i.$$

Ceci correspond à l'équation de Bernoulli instationnaire (§ ??) dans laquelle on néglige le terme en v^2 à cause de l'hypothèse de faible amplitude.

La surface plane devant être solution, on a $C_1 = C_2 = P_{atm}$. En particulier à l'interface nous avons :

$$p_1 - p_2 = \rho_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - (\rho_1 - \rho_2) g \zeta. \quad (2.1)$$

Conditions aux limites : elles sont de deux sortes, cinématiques (égalité des vitesses transverses à l'interface) et dynamiques (égalité des contraintes normales). Pour la première, comme l'amplitude de la déformation est faible, il suffit que : $v_{z1} = v_{z2}$ soit :

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (2.2)$$

(La relation exacte, valable quelque soit l'amplitude de la déformation, sera donnée par l'équation ?? page ??.) Cette condition nous donne ici la relation : $k A_1 = -k B_2 = -i\omega \zeta_0$. Ceci nous permet d'exprimer les constantes d'intégration A_1 et B_2 en fonction de l'amplitude de l'onde :

$$\begin{cases} \Phi_1 = -i\frac{\omega}{k}\zeta_0 \exp(kz) \exp i(kx - \omega t) \\ \Phi_2 = i\frac{\omega}{k}\zeta_0 \exp(-kz) \exp i(kx - \omega t) \end{cases} \quad (2.3)$$

La condition dynamique nous dit que la différence de pression sur une interface courbée est donnée par la loi de Laplace (§ ??) :

$$p_{int} - p_{ext} = \gamma \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right],$$

où γ est la tension de surface. Ici pour des ondes planes (invariantes en y) nous avons un seul rayon de courbure et la courbure étant faible : $p_1 - p_2 \approx -\gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$, soit :

$$p_1 - p_2 = \gamma k^2 \zeta \quad (2.4)$$

En rassemblant ces trois résultats (équations 2.1, 2.3 et 2.4) on obtient finalement *la relation de dispersion des ondes planes linéaires en eau profonde* :

$$\boxed{\omega^2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} gk + \frac{\gamma}{\rho_1 + \rho_2} k^3}. \quad (2.5)$$

Notons que si $\rho_1 < \rho_2$ la pulsation est complexe, c'est-à-dire que l'on est en présence d'une instabilité. C'est l'instabilité de Rayleigh-Taylor qui sera décrite plus loin (§ ?? page ??). L'équation précédente peut aussi s'écrire :

$$\omega^2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} gk \left[1 + \left(\frac{k}{k_c} \right)^2 \right]. \quad (2.6)$$

Avec

$$k_c = \sqrt{(\rho_1 - \rho_2)g/\gamma}. \quad (2.7)$$

Ce nombre d'onde de coupure k_c , appelé nombre d'onde capillaire, sépare le régime des ondes capillaires (petites longueurs d'onde – ou grands k – contrôlées par la tension de surface) de celui des ondes de gravité (grandes longueurs d'onde – ou petit k – gouvernées par la gravité). La relation de dispersion $\omega(k)$ n'étant pas linéaire, les ondes de surface sont dispersives ($v_\varphi \neq v_g$).

2.2.2 Application aux ondes à la surface de l'eau

Dans le cas des ondes à la surface de l'eau, les densités des deux fluides (air et eau) étant dans un rapport 1000 environ, on peut négliger ρ_2 devant ρ_1 et la relation de dispersion (Eq. 2.5) s'écrit :

$$\omega^2 = gk \left[1 + \left(\frac{k}{k_c} \right)^2 \right]. \quad (2.8)$$

Dans le cas air/eau $\lambda_c = 2\pi l_c = 2\pi/k_c \approx 17$ mm.

L'évolution de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe avec le nombre d'onde est représenté sur la figure 2.3.

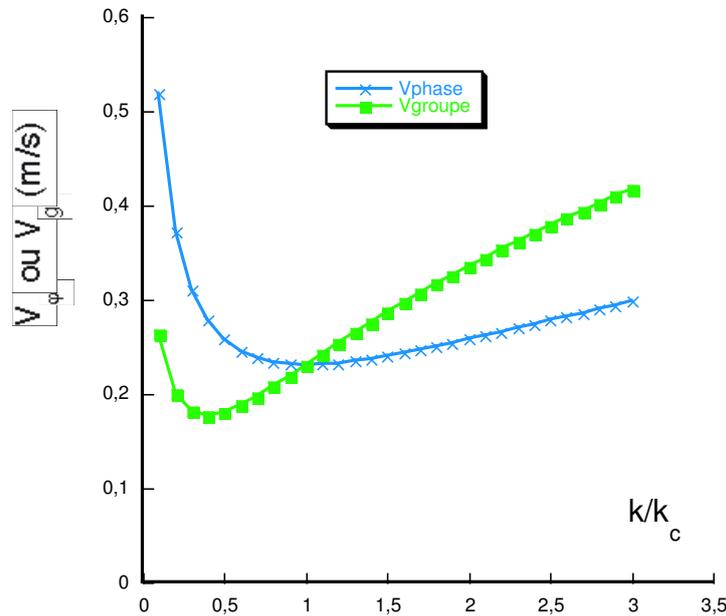


FIGURE 2.3 – Evolution de la vitesse de phase v_φ (×) et de la vitesse de groupe v_g (□) en fonction du nombre d'onde adimensionné k/k_c . Pour $k/k_c < 1$ ce sont des ondes de gravité ($v_g < v_\varphi$), et pour $k/k_c > 1$ ce sont des ondes capillaires ($v_g > v_\varphi$).

Limite des ondes de gravité :

Si $k \ll k_c$ ($\lambda \gg 17$ mm) on est dans le domaine des ondes de gravité et la relation de dispersion se simplifie :

$$\omega^2 = gk.$$

La vitesse de phase s'écrit alors $v_\varphi = \sqrt{g/k} = g/\omega$ et $v_g = \frac{1}{2}v_\varphi$.

La figure 2.1 représente l'évolution d'un paquet d'ondes de gravité. Des ondes naissent à l'arrière du paquet d'ondes et meurent à l'avant.

Limite dans le domaine des ondes capillaires :

Si $k \gg k_c$ ($\lambda \ll 17$ mm) on est dans le domaine des ondes capillaire et la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega^2 = gk^3/k_c^2 = \frac{\gamma}{\rho}k^3.$$

La vitesse de phase s'écrit alors $v_\varphi = \sqrt{\gamma k/\rho}$ et $v_g = \frac{3}{2}v_\varphi$. En pratique ces ondes ne sont pas longtemps observables car elles sont fortement dissipées par la viscosité (§ 2.2.9 page 38).

Exercices :

- Montrer que les vitesses de phase et de groupe sont égales si $k = k_c$.

- Montrer que les ondes de surface ne peuvent pas se propager en dessous d'une certaine vitesse. Calculer ce minimum de la vitesse de phase. Montrer qu'il vaut 23 cm/s pour de l'eau pure.
- Calculer la vitesse de groupe minimale. Que vaut alors k/k_c ?

2.2.3 Paquet d'onde généré par un caillou jeté dans l'eau

En jetant un caillou dans l'eau on injecte brutalement de l'énergie en un point et à un instant donné. Une grande partie de cette énergie est rayonnée sous forme d'ondes interfaciales radiales. Rapidement ces ondes circulaires perdent de l'amplitude (en $r^{-1/2}$ car elles augmentent leur périmètre) même en l'absence de dissipation et l'on arrive ensuite dans un régime d'ondes linéaires pratiquement planes.

Si le caillou de taille L est gros comparé à la longueur capillaire, les ondes de taille L sont des ondes de gravité. Elles voyagent avec une vitesse de groupe égale à la moitié de leur vitesse de phase. Le front externe du paquet d'onde va donc moins vite que les ondes individuelles. Les ondes meurent en arrivant sur ce front avant. A l'arrière du paquet d'onde (plus vers le centre) on retrouve les ondes les plus lentes correspondant à la vitesse de groupe minimale. Ces ondes ont une vitesse de phase légèrement plus grande que leur vitesse de groupe, elles semblent donc naître sur le front arrière. Voir figures 2.4a et 2.5a. Au final on retrouve les plus grandes longueurs d'ondes à l'avant du paquet d'onde.

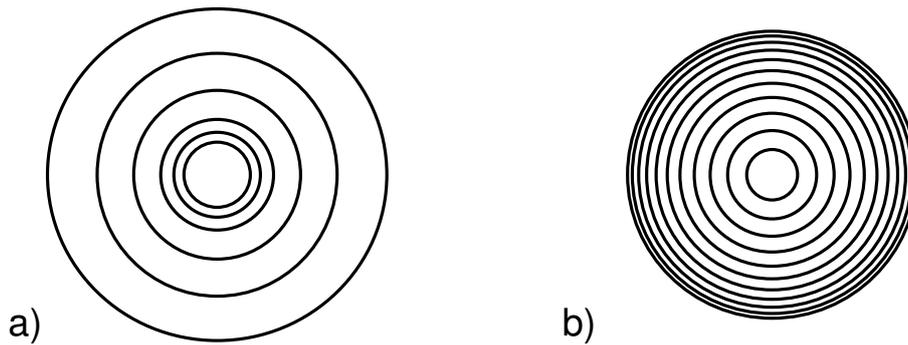


FIGURE 2.4 – Schémas vus de dessus des ronds dans l'eau créés par un gros caillou jeté dans l'eau (a) et par une goutte de pluie tombant sur une surface d'eau (b).

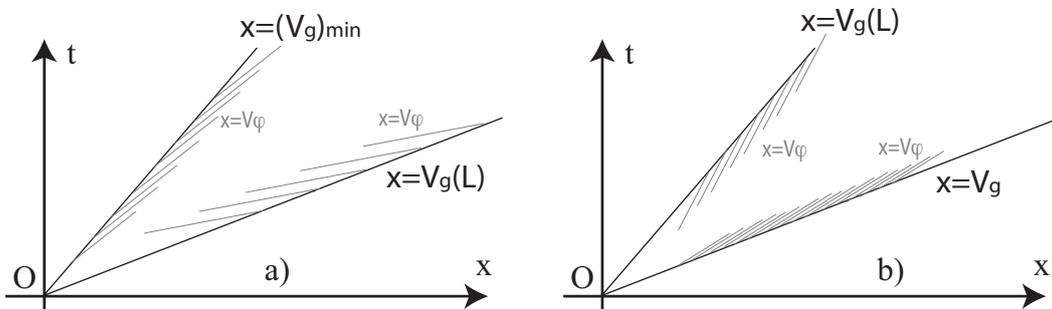


FIGURE 2.5 – Diagrammes spatio-temporels esquissant l'évolution d'un paquet d'onde dans le plan (r, t) (a) pour un gros caillou dans l'eau ($v_\varphi > v_g$) et (b) pour une goutte dans l'eau ($v_\varphi < v_g$).

Si maintenant on jette un tout petit caillou de taille $L < \lambda_c$ (ou si l'on regarde tomber des gouttes de pluie), toutes les ondes émises sont des ondes capillaires. Les ondes les plus lentes correspondent à des ondes capillaires de longueur d'onde L et elles ont donc une vitesse de phase inférieure à la vitesse de groupe. Elles se font donc rattraper par le front arrière et y meurent. Devant, il n'y a en principe pas de limite à la vitesse de phase et de très petites longueurs d'onde devraient se propager très loin en avant (avec une vitesse de groupe supérieure à la vitesse de phase). Toutefois ces petites longueurs d'onde sont aussi très vite atténuées par la viscosité (voir § 2.2.9) et ne sont pas visibles en pratique. Voir figures 2.4b et 2.5b.

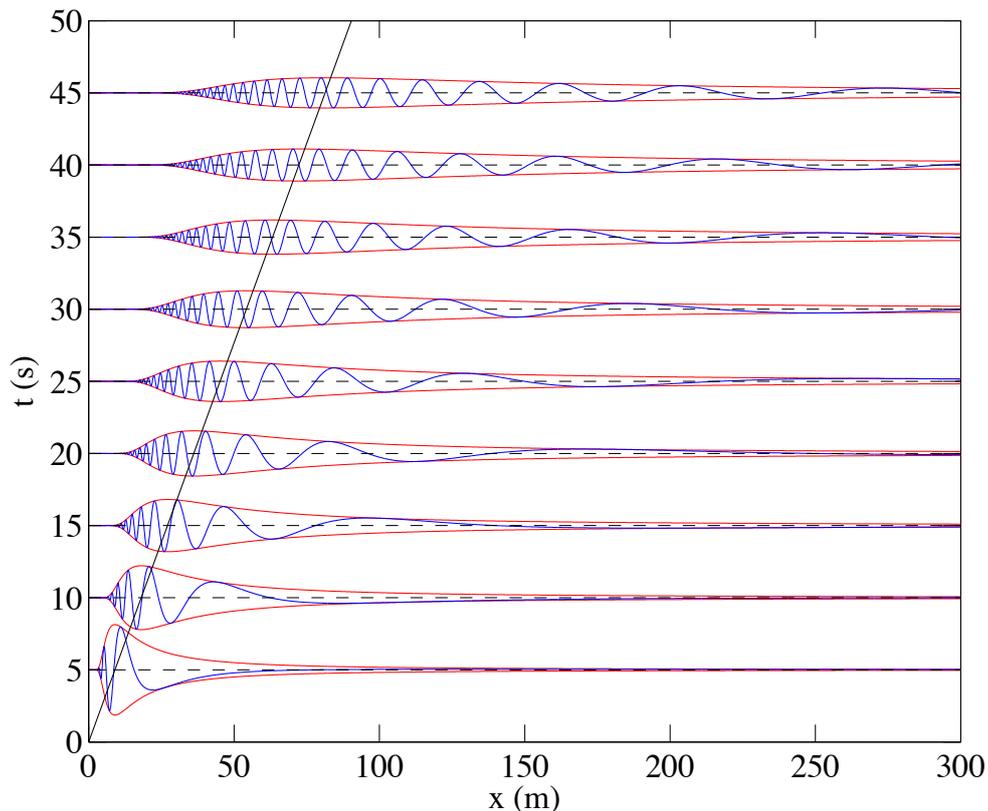


FIGURE 2.6 – Solution gravitaire à une dimension pour une perturbation initiale lorentzienne de taille 1 m ($L(x) = 1/(1 + x^2)$). La vitesse de groupe, ici 5.4 m/s, est indiquée par le trait noir. La longueur d'onde locale au maximum d'amplitude est de l'ordre de la taille de la perturbation, seule longueur du problème.

Le calcul complet des ondes de gravité générées par une impulsion initiale de taille L est un très joli problème connu sous le nom de problème de Cauchy-Poisson (Lamb § 240, Havelock 1908, p. 406, Lighthill p. 248-253). Même avec une perturbation localisée qui contient toutes les longueurs d'ondes, les plus grandes longueurs d'ondes ne sont pas visibles car, se propageant très vite, leur amplitude est atténuée par étirement à la surface de l'eau par le gradient de vitesse de groupe (figure 2.6). Même pour une perturbation localisée, qui contient un maximum d'énergie dans les grandes longueurs d'ondes, on observe finalement un paquet d'onde où le nombre d'onde dominant correspondant à la

taille L de l'objet ($k_L \sim 2\pi/L$). Ce paquet d'onde voyage à la vitesse de groupe de ce nombre d'onde k_L .

2.2.4 Ondes en amont et en aval d'un obstacle

Supposons que l'on place verticalement un bâton dans une rivière s'écoulant à la vitesse U . Pour cet obstacle l'écoulement est indépendant du temps, et l'on observera une déformation stationnaire de l'interface. Pour les ondes se propageant dans le sens du courant, cela veut dire que $v_\varphi = -U$. Si on se reporte à la figure 2.3, on voit que si $U > U_{min}$ il existe deux longueurs d'onde possibles, une longueur d'onde dans le domaine capillaire $\lambda_1 < \lambda_c$ et une dans le domaine des ondes de gravité $\lambda_2 > \lambda_c$. En observant un bâton dans l'eau (figure 2.7) on peut voir en effet des ondes capillaires immobiles en amont (car leur vitesse de groupe $v_g > v_\varphi = -U$) mais amorties par la viscosité assez rapidement et les ondes de gravité immobiles en aval de l'obstacle (car $v_g < v_\varphi = -U$).

La forme complète des ondes capillaires stationnaires en amont d'un obstacle ponctuel a été étudiée par Poncelet (1831) puis par Kelvin et Helmholtz [3].



FIGURE 2.7 – Photographie montrant les ondes fixes autour d'un bâton immobile dans un ruisseau. Les petites longueurs d'onde sont en amont (à droite) et les plus grandes en aval (à gauche).

2.2.5 Le sillage en « V » ou sillage de Kelvin

Rappelons d'abord ce qui se passe pour des ondes non dispersives comme les ondes sonores. Pour cela considérons un avion supersonique qui se déplace à vitesse constante U . Lorsque qu'il était au point M (figure 2.8a) il a émis des ondes sphériques qui se propagent à la célérité c (constante, quelque soit le nombre d'onde pour un milieu non dispersif comme l'air en première approximation). Ces ondes ont atteint le point H tel que $MH = c \Delta t$ alors que l'avion a parcouru pendant ce temps là la distance $MO = U \Delta t$ (avec $U > c$). Les ondes émises par tous les points M pendant Δt sont donc toutes arrivées sur le bord du cône dont l'angle θ est donné par la relation : $\sin \theta = MH/MO = c/U$. On appelle nombre de Mach le rapport $Ma = U/c$, et donc $\sin \theta = 1/Ma$. L'onde de choc correspond à l'accumulation des ondes de pression sur ce cône et n'existe que si $Ma > 1$.

Revenons maintenant aux ondes de surface générées par un objet ponctuel se déplaçant à la vitesse U . Nous ne considérerons ici que des ondes de gravité. Le milieu étant dispersif, il faut raisonner d'abord pour chaque nombre d'onde k (figure 2.8b). Cette fois-ci, pour des ondes de gravité $v_g = \frac{1}{2}v_\varphi$,

l'énergie de l'onde émise en M n'est pas arrivée en H mais en H' (avec $MH' = \frac{1}{2}MH$). Toutes les ondes de nombre d'onde k émises pendant Δt sont arrivées sur le bord du triangle d'angle au sommet $\alpha(k)$. On a la relation :

$$\tan(\theta - \alpha) = H'H/HO = \frac{1}{2}MH/HO = \frac{1}{2} \tan \theta.$$

En développant il vient :

$$\tan \alpha(k) = \frac{\tan \theta}{2 + \tan^2 \theta},$$

avec $\sin \theta(k) = v_\varphi(k)/U$.

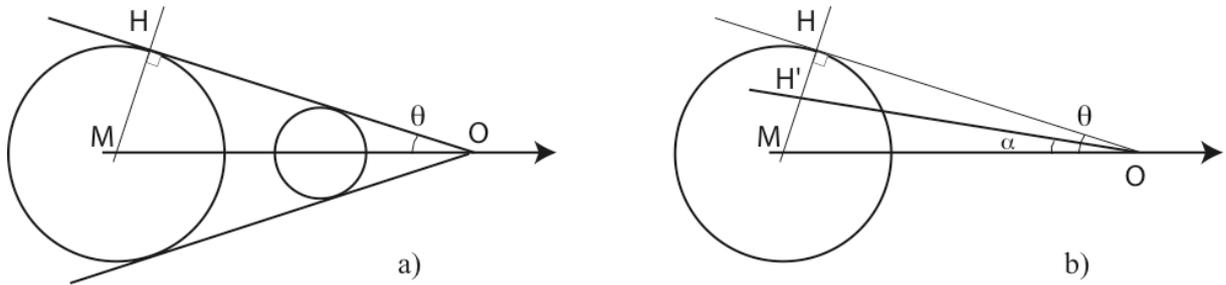


FIGURE 2.8 – Construction du cône de Mach (a) et du sillage de Kelvin (b)

Si on laisse maintenant varier le nombre d'onde k , leur vitesse de phase $v_\varphi(k)$ et donc l'angle $\theta(k)$ vont varier aussi. En étudiant la variation de la fonction $\alpha(k)$ on voit qu'elle possède un maximum lorsque θ varie entre 0 et $\pi/2$ (figure 2.9). Ce maximum correspond à $\tan \theta_0 = \sqrt{2}$ et donc $\tan \alpha_0 = \sqrt{2}/4$. Au-delà de cet angle maximum $\alpha_0 = \arcsin(1/3) \approx 19,47^\circ$ aucune onde n'est observée. En-deçà de cet angle il existe deux longueurs d'onde différentes pour le même angle. On a accumulation d'énergie lorsque $d\alpha/dk = 0$, et donc un maximum d'amplitude au voisinage du dièdre d'angle α_0^2 .

Les vagues qui sont observées au maximum d'amplitude sont des ondes d'une longueur d'onde particulière k_0 dont les crêtes font un angle $\theta_0 = 54,73^\circ$ avec l'axe du navire (en effet leur vitesse de phase est dirigée selon MH). Elles font donc en angle $\theta_0 - \alpha_0 = 35,26^\circ$ avec le bord du sillage. C'est ce sillage d'angle constant qui est aussi observé derrière des canards sur une mare (figure 2.10b et c), du moment qu'ils se déplacent en ligne droite et à une vitesse supérieure à la vitesse minimum d'apparition des ondes de surface. Dans le cas des navires de grandes longueurs ou de forme assez rectangulaire comme une péniche, on peut observer deux sillages de Kelvin bien distincts : celui de l'étrave et celui de la poupe.

Notons que dans ces problèmes de sillage d'avion ou de bateau, l'écoulement est stationnaire dans le référentiel de l'obstacle, on s'intéresse donc aux solutions stationnaires dans ce référentiel. Il faut donc que la vitesse du bateau projetée dans la direction de propagation \vec{k} des ondes soit égal à la vitesse de phase, ce qui peut s'écrire $U \sin(\theta) = v_\varphi$ ou encore $\vec{U} \cdot \vec{k} = \omega$. Cela correspond à une fréquence corrigée de l'effet Doppler

$$\boxed{\omega' = \omega - \vec{U} \cdot \vec{k}} \quad (2.9)$$

nulle dans le référentiel de l'obstacle.

2. Ce problème est assez similaire au maximum de déviation des rayons lumineux dans une goutte d'eau qui explique les couleurs de l'arc-en-ciel.

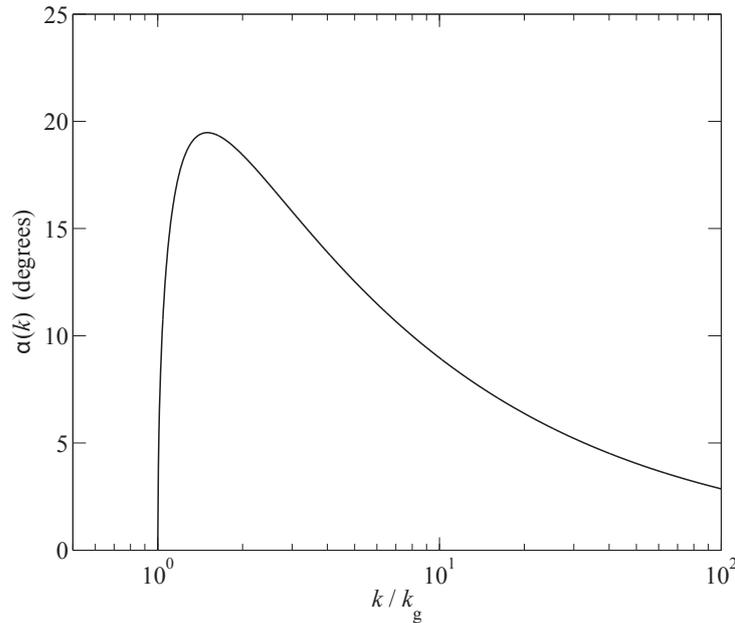


FIGURE 2.9 – Evolution de l’angle de radiation α sur lequel se trouve l’énergie en fonction du nombre d’onde k/k_g , où $k_g = g/U^2$ est le plus petit nombre d’onde se propageant à la vitesse du bateau et dans la direction du mouvement.

Pour le nombre d’onde des vagues divergentes du sillage en V nous avons la relation : $\sin \theta_0 = v_\varphi(k_0)/U$, soit comme $v_\varphi = \sqrt{g/k}$: $k_0 = \frac{g}{U^2 \sin^2 \theta} = \frac{3}{2} \frac{g}{U^2}$. Cette relation permet de mesurer la vitesse d’un bateau sur une simple photo si on possède l’échelle. De même on peut mesurer la vitesse d’un bateau en mesurant la période $T_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{2\pi}{g} U$ des ondes arrivant sur la plage ou les berges. Ces ondes sont très étudiées actuellement car elles sont une source importante d’érosion des berges des rivières et des canaux. Ce phénomène porte le joli nom de *batillage*.

Démonstration géométrique du sillage de Kelvin

Voici une deuxième démonstration inspirée du livre de Whitham [16]. Puisque pour toutes les longueurs d’onde, la droite MH fait en angle droit avec la droite HO (figure 2.8b) lorsque k et donc θ varie le point H décrit un demi-cercle de diamètre MO (figure 2.10a). Le point H’ situé au milieu de MH décrit donc lui un demi-cercle de diamètre MI. L’énergie ne peut donc pas atteindre de point situé à l’extérieur de la droite issue de O et qui tangente le cercle de diamètre MI. Le sinus de l’angle maximum α_0 est donc donné par $\sin \alpha_0 = \frac{MI/2}{3MI/2} = 1/3$, soit $\alpha_0 = 19,47^\circ$.

Les « trompettes de Kelvin »

En plus de l’angle du maximum de déviation des vagues dans le sillage on peut chercher qu’elle est la forme des crêtes des vagues qui suivent le bateau. Pour selon supposons que le bateau soit en O à l’instant t mais était en M à l’instant 0 (figure 2.8b). Si Ox est l’axe de déplacement du bateau on a $M = (-Ut, 0)$. Le point H’ à donc pour coordonnées $H' = (-Ut + v_g t \cos \varphi, v_g t \sin \varphi)$ où φ est l’angle entre la direction de propagation de l’onde de nombre d’onde k issue de M et l’axe du

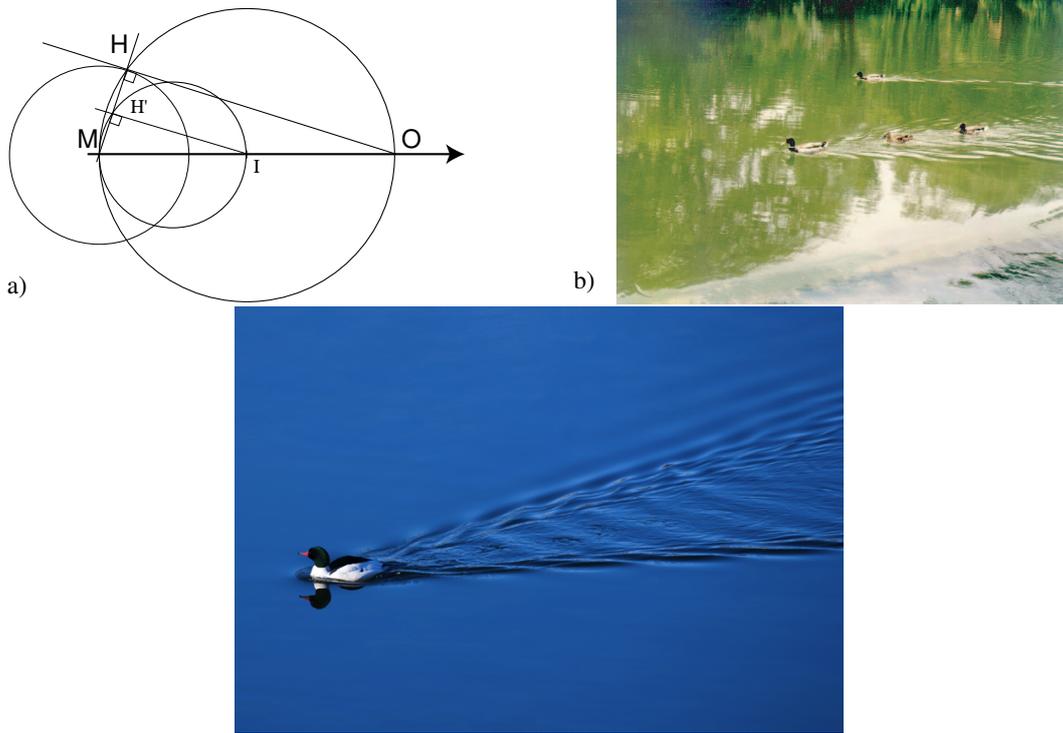


FIGURE 2.10 – Construction géométrique du sillage de Kelvin (a) et exemples du sillage de canards (b,c).

déplacement du bateau. La condition de stationnarité des ondes vis-à-vis du bateau impose $U \cos \varphi = v_\varphi$. Si l'on pose $v_g = r v_\varphi$ pour traiter à la fois le cas des ondes de gravité ($r = 1/2$) et les ondes capillaires ($r = 3/2$) et en écrivant $X = Ut$, il vient :

$$\begin{cases} x = -X(1 - r \cos^2 \varphi) \\ y = Xr \cos \varphi \sin \varphi \end{cases} \quad (2.10)$$

Nous devons maintenant écrire que lorsque X ou l'angle φ varient légèrement le point H' varie de (dx, dy) (on différentie les équations précédentes à $r = \text{Cste}$) et que cette variation conduit à un déplacement \vec{dl} qui doit être perpendiculaire au vecteur d'onde pour rester sur une crête soit : $dx \cos \varphi + dy \sin \varphi = 0$.

On obtient alors l'équation qui lie X et φ :

$$X = X_0 (\cos \varphi)^{\left(\frac{r}{1-r}\right)}.$$

Ce qui donne en reportant dans l'équation paramétrique précédentes :

$$\begin{cases} x = -X_0 (\cos \varphi)^{\left(\frac{r}{1-r}\right)} (1 - r \cos^2 \varphi) \\ y = X_0 (\cos \varphi)^{\left(\frac{r}{1-r}\right)} r \cos \varphi \sin \varphi \end{cases} \quad (2.11)$$

Ces courbes sont tracées sur la figure 2.11.

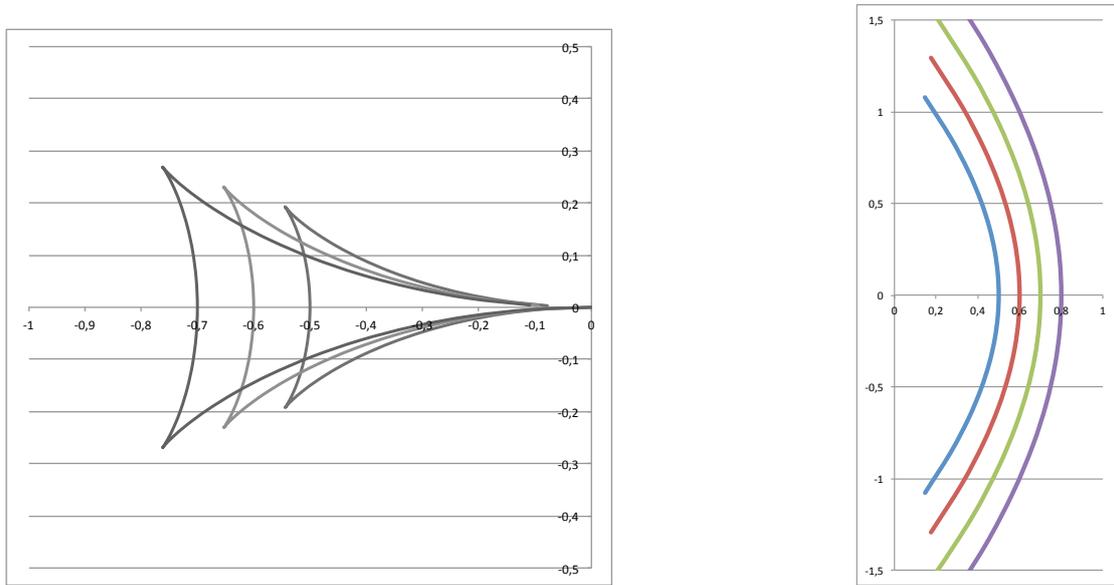


FIGURE 2.11 – Forme en trompette des ondes de gravité ($r = 1/2$) derrière l'obstacle (a) et des ondes capillaires ($r = 3/2$) devant l'obstacle (b). Noter que les échelles des deux figures sont très différentes.

2.2.6 Traînée de vague et vitesse limite de coque

Les ondes de surface émissent par l'obstacle en mouvement dans un fluide au repos transporte de l'énergie loin de l'obstacle. On dit qu'elles rayonnent de l'énergie à l'infini. Cette énergie est fournie par le travail d'une force que l'on appelle la traînée de vague et qui existe donc même si l'on considère le fluide comme parfait. Pour un bateau rapide cette force peut être une composante importante de la force de traînée totale.

Si l'on regarde maintenant les ondes se propageant dans l'axe du navire qui se déplace à sa vitesse U , elles ont pour vitesse de phase, $v_\varphi = U$ et donc une longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{g}U^2$. Les ondes générées par l'étrave sont visibles le long de la coque. Lorsque ces ondes sont en phase avec celles émises par la poupe, c'est-à-dire lorsque $L = n\lambda$ où L est la longueur du navire à la flottaison, on observe un maximum d'énergie rayonné par le sillage de vague et donc un maximum de la traînée de vague. Ces vitesses particulières de résonance sont en général évitées par les navires de transport.

Cas particulier des petits bateaux ou des navires rapides : Lorsque la longueur d'onde de la vague d'étrave est de l'ordre de la longueur de coque L , il apparaît une très forte augmentation de la traînée de vague, en effet au-delà de cette vitesse le bateau se retrouve cabré sur sa vague d'étrave. C'est ce que l'on appelle la vitesse limite de coque $U_{max} = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$. Les navires les plus longs peuvent donc aller plus vite avant d'atteindre leur vitesse limite de coque et c'est pour cela que la longueur de la coque des voiliers est souvent limitée en régate. Les navires légers et à la propulsion puissante peuvent toutefois de nos jours dépasser cette vitesse limite en partant au « planing ». On dit aussi qu'ils « déjaugent » (voir figure 2.12b). La transition apparaît lorsque le nombre de Froude de coque $Fr = U/\sqrt{gL}$ est de l'ordre de 0.4. Les longueurs d'onde théoriques derrière le bateau ou aux bords du triangle de Kelvin sont respectivement $2\pi Fr^2 L$ et $\frac{4}{3}\pi Fr^2 L$. Pour un bateau rapide ($Fr > 1$) ces longueurs d'onde seraient très supérieures à la longueur de la coque, mais la coque n'est pas efficace

pour générer de telles vagues (voir problème de Cauchy-Poisson, Fig. 2.6). En conséquence, toutes les longueurs d'onde utiles pour la construction géométrique de sillage ne sont pas présentes et on observe une structure tronquée du sillage de Kelvin avec un angle qui décroît avec la vitesse du bateau.

Des sillages similaires en "V" peuvent aussi exister dans les fluides stratifiés : dans l'atmosphère (figure 2.13) ou dans certains fjords (http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/XML/db/csphysique/metadata/LOM_CSP_Phenomene-eaux-mortes.xml).



FIGURE 2.12 – Différence des formes de sillage entre (a) un petit bateau de pêche proche de sa vitesse limite de coque (nombre de Froude de l'ordre de 0.5) et (b) un navire très rapide (nombre de Froude grand devant 1).

2.2.7 Trajectoire des particules et lignes de courant sous la vague

Si l'eau est assez profonde et si l'amplitude de la vague reste faible, le déplacement vertical d'un flotteur lors du passage de la vague est accompagné d'un mouvement de va-et-vient horizontal de même amplitude. Le flotteur décrit alors des cercles, dans le sens des aiguilles d'une montre pour une onde se déplaçant devant nous de gauche à droite (figure 2.14). On peut d'ailleurs ressentir ce mouvement circulaire en se laissant flotter au large dans les vagues. Notons que même si, au sommet de la vague, il existe une vitesse de l'eau dans le sens du déplacement de l'onde, cette vitesse du fluide est en général très inférieure à la vitesse de l'onde. De plus, moyenné sur une période, le déplacement de la particule fluide est nul³. Ce mouvement circulaire de l'eau existe aussi sous la surface, mais avec une amplitude qui décroît rapidement avec z (exponentiellement) et il n'est déjà pratiquement plus mesurable à une profondeur comparable à la longueur d'onde de la vague. Un plongeur qui s'enfonce

3. Ces mouvements des particules d'eau, dans un sens en haut de la vague et en sens contraire dans le creux de la vague (voir figure 2.14), jouent un rôle dans le chavirage des embarcations prises dans de grosses vagues.

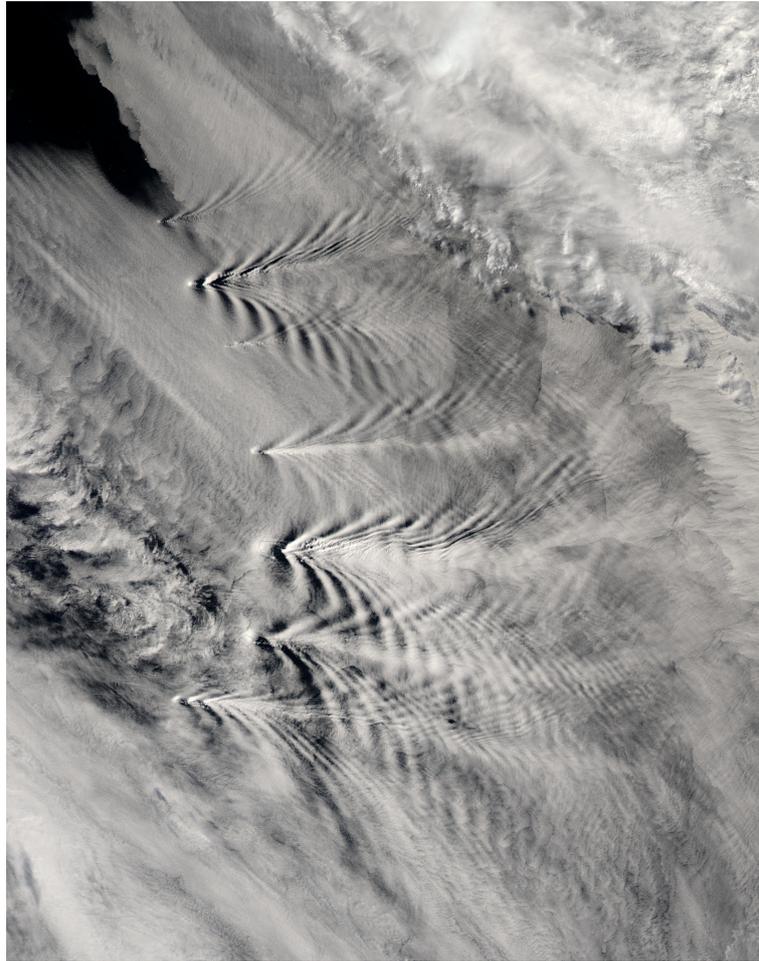


FIGURE 2.13 – Sillages de Kelvin dans l’atmosphère. Ondes observées dans la couche nuageuse en aval des îles Sandwich du Sud (Cliché Nasa, <http://earthobservatory.nasa.gov/IOTD/view.php?id=4174>).

sous la surface est ainsi rapidement à l’abri de la houle si la profondeur de l’eau est suffisamment grande.

Pour trouver les trajectoires des particules fluides pendant une période, il faut intégrer en temps la vitesse de la particule en suivant son mouvement. D’après l’équation 2.3, $\Phi = \frac{\omega}{k} \zeta_0 e^{kz} \sin(kx - \omega t)$, soit :

$$\begin{cases} v_x = \omega \zeta_0 e^{kz} \cos(kx - \omega t) \\ v_z = \omega \zeta_0 e^{kz} \sin(kx - \omega t) \end{cases} \quad (2.12)$$

On remarque tout d’abord que le module du vecteur vitesse vaut $|\vec{v}| = \omega \zeta_0 e^{kz}$. Il est indépendant du temps et de la position x et s’amortit exponentiellement avec la profondeur. Dans la limite des très faibles amplitudes ($\zeta_0 k \ll 1$) les trajectoires sont des cercles de rayon $\zeta_0 e^{kz}$. Si l’amplitude n’est pas petite, l’intégration lagrangienne du mouvement des particules fluides (que l’on peut résoudre par approximations successives) fait apparaître une lente dérive, appelée « dérive de Stokes » dans le sens

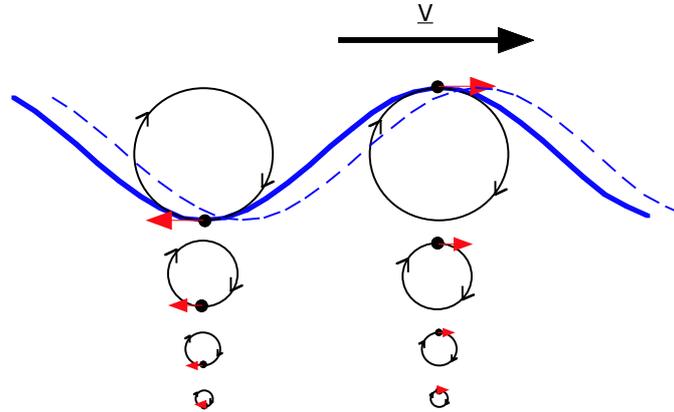


FIGURE 2.14 – Schéma montrant dans un plan vertical le mouvement circulaire de l'eau lors du passage de gauche à droite d'une vague. Noter que par soucis de visibilité l'amplitude de l'onde a été exagérée et n'est plus petite devant la longueur d'onde comme elle le devrait. Ici est représentée la position de la surface à deux instants successifs. Les cercles noirs représentent les trajectoires suivies par les points noirs lorsque l'onde avance d'une longueur d'onde. Les flèches représentent leur vitesse à l'instant initial. Noter la diminution importante du mouvement circulaire de l'eau lorsqu'on s'enfonce sous la surface.

de propagation de l'onde (voir TD n°1). Les trajectoires ont alors une forme de cycloïde, la vitesse moyenne de dérive vaut $k^2 \zeta_0^2 v_\varphi e^{2kz}$ (voir Ref. [6] page 232). Une façon de comprendre ce résultat est que sur l'orbite circulaire (au premier ordre) une particule en haut est soumise à une vitesse plus grande qu'en bas de la trajectoire du fait de l'atténuation exponentielle avec la profondeur du champ de vitesse, et en moyenne il apparaît donc une dérive lente.

Mais revenons au cas des très faibles amplitudes. Pour tracer les lignes de courant à un instant donné il faut calculer la fonction de courant Ψ . Or $\vec{v} = \vec{\nabla}(\Phi) = \text{rot}(\Psi \vec{e}_y)$, d'où l'équation du champ scalaire $\Psi(x, z) = \Psi_0 - \frac{\omega}{k} \zeta_0 e^{kz} \cos(kx - \omega t)$. Les lignes de champ ont donc pour équation $z = z_0 - \frac{1}{k} \ln |\cos(kx - \omega t)|$. Les isopotentiels $\Phi = \text{Cste}$ seront elles perpendiculaires en tout point aux lignes de courant. Les figures 2.15 et 2.16 permettent d'avoir une idée des lignes de courant à un instant donné sous la surface.

2.2.8 Energie transportée par la houle

Les vagues transportent de l'énergie, il n'y a qu'à voir l'effet dévastateur d'une tempête en bord de mer. Cette énergie est transportée sous forme d'énergie cinétique et d'énergie potentielle.

Energie cinétique

La densité locale d'énergie cinétique (énergie cinétique par unité de volume) s'écrit $e_c = \frac{1}{2} \rho v^2$. Or nous avons vu que le module de la vitesse ne dépend ni de x ni du temps : $v^2 = \zeta_0^2 \omega^2 \exp 2kz$. L'énergie cinétique intégrée dans la profondeur par unité d'aire A de la surface s'écrit donc :

$$\frac{E_c}{A} = \int_{-\infty}^0 e_c dz = \frac{1}{4} \rho \zeta_0^2 \frac{\omega^2}{k}.$$

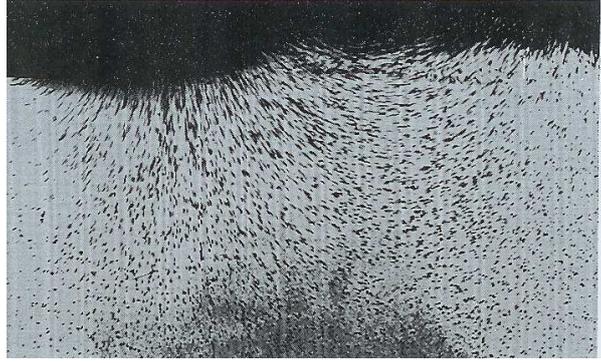


FIGURE 2.15 – Lignes de courant sous la surface obtenues par photographie en pose courte de particules en suspension. Ces lignes sont solutions de l'équation $z = z_0 - \frac{1}{k} \ln |\cos(kx - \omega t)|$.

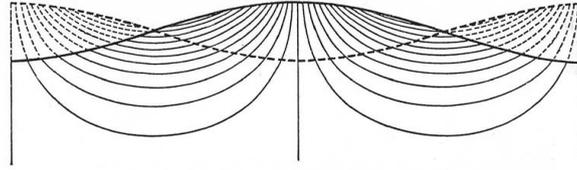


FIGURE 2.16 – Isopotentiels de vitesse représentés à deux instants en opposition de phase pour des ondes en eau profonde (d'après [7] page 366).

Or ω et k sont reliés par la relation de dispersion (Eq. 2.8) et donc :

$$\frac{E_c}{A} = \frac{1}{4} \rho \zeta_0^2 g \left[1 + \left(\frac{k}{k_c} \right)^2 \right].$$

Energie potentielle de gravité

En prenant comme référence des énergies potentielles de gravité l'état de repos $z = 0$, une particule à l'altitude z possède une densité d'énergie potentielle $e_p = \rho g z$. Il existe donc une énergie potentielle moyenne par unité d'aire :

$$\frac{E_p}{A} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \int_0^{\zeta(x,t)} \rho g z dx dz = \frac{1}{2} \rho g \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \zeta^2(x,t) dx = \frac{1}{4} \rho g \zeta_0^2.$$

Energie potentielle capillaire

En présence de tension de surface, il existe un autre terme dans l'énergie potentielle : l'énergie élastique due à l'augmentation de surface.

$$E_\gamma/A = \gamma (S_{surface}/A - 1) = \gamma \left((1/\lambda) \int_0^\lambda dl - 1 \right).$$

Or l'abscisse curviligne le long de l'interface est donné par $dl^2 = dx^2 + dz^2 = dx^2 (1 + \zeta_0^2 k^2 \sin^2 kx)$ soit $dl = dx (1 + \frac{1}{2} \zeta_0^2 k^2 \sin^2 kx)$. Donc $E_\gamma/A = \frac{1}{4} \gamma \zeta_0^2 k^2$.

L'énergie élastique moyenne par unité de surface s'écrit donc en introduisant le nombre d'onde de coupure k_c :

$$\frac{E_\gamma}{A} = \frac{1}{4} \rho g \zeta_0^2 \left(\frac{k}{k_c} \right)^2.$$

Energie totale

Finalement, comme pour un pendule simple, il y a en moyenne autant d'énergie potentielle totale (gravité et capillaire) que d'énergie cinétique. L'énergie totale $E = E_p + E_c + E_\gamma$ s'écrit par unité de surface :

$$\boxed{\frac{E}{A} = \frac{1}{2} \rho \zeta_0^2 g [1 + (k/k_c)^2]} \quad (2.13)$$

L'énergie par unité de surface est proportionnelle au carré de l'amplitude des vagues.

Exercice : Calculer l'énergie transportée par une houle de 2 mètres d'amplitude et de 200 m de longueur d'onde par mètre carré.

Flux d'énergie

Comme la pression et la vitesse horizontale du fluide sont en phase sous la vague, une colonne de fluide exerce un travail sur le fluide de la colonne de fluide situé du côté de la direction de propagation, d'où un flux d'énergie : $\dot{W} = \int_{-\infty}^{\zeta} p u dz = v_g E$. L'énergie se propage donc bien à la vitesse de groupe.

2.2.9 Atténuation des ondes de surface

Jusqu'ici nous avons considéré que le fluide était parfait. Si l'on suppose que ces solutions sont toujours valables même en présence d'une faible viscosité du fluide on peut estimer la dissipation d'énergie et donc l'atténuation des ondes.

Le taux de dissipation de l'énergie par unité de volume et de temps (§ ??) vaut :

$$\epsilon = -\eta/2 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

(avec une sommation implicite sur tout les indices redoublés). En écrivant que l'évolution de la densité d'énergie $\frac{\partial e}{\partial t} = \epsilon$ et en intégrant sur toute la colonne d'eau, on en déduit l'amortissement temporel des ondes :

$$\zeta(t) = \zeta_0 \exp(-2\nu k^2 t).$$

La durée caractéristique d'amortissement $\tau = \frac{1}{2\nu k^2} = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\nu}$. On peut aussi décrire cette évolution de l'amplitude en introduisant une partie imaginaire dans la pulsation ω . On passe du temps d'amortissement τ à la distance d'amortissement L en écrivant que $L = v_g \tau$. On a finalement :

$$\tau/T = \frac{\omega}{4\pi\nu k^2}$$

et

$$L/\lambda = (v_g/v_\varphi)(\tau/T).$$

Dans le cas de l'interface eau/air en profondeur infini, les valeurs des longueurs et des temps d'amortissement sont donnés dans la table 2.1.

λ (m)	L (m)	τ
1 mm	12 mm	0,01 s
1 cm	30 cm	1 s
1 m	23 km	3,5 heures
10 m	7500 km	14 jours
100 m	60 fois le tour de la Terre !	4 ans !

TABLE 2.1 – Evolution de la longueur caractéristique d'amortissement L ou du temps d'amortissement τ en fonction de la longueur d'onde dans le cas de l'eau.

Ce tableau donne l'évolution de la longueur caractéristique d'amortissement et du temps d'amortissement en fonction de la longueur d'ondes des vagues. Il montre que les ondes capillaires s'amortissent très vite et que seules persistent les vagues de grandes longueurs d'onde lorsque le vent se calme. En réalité l'évolution du spectre des vagues est due d'une part à la dispersion, d'autre part à l'atténuation sélective des longueurs d'onde et enfin à des transferts non-linéaires entre modes. Le spectre mesuré en mer est souvent décrit par le spectre de Pierson-Moskowitz :

$$S(\omega) = \alpha \frac{g^2}{w^5} \exp \left[-\beta \left(\frac{g}{U\omega} \right)^4 \right].$$

Le calcul de l'atténuation présenté ici n'est justifiable que si l'atténuation est faible, c'est-à-dire si τ est grand devant la période des ondes et donc si L est grand devant la longueur d'onde. Pour l'eau l'approximation n'est plus valable pour des longueurs d'onde inférieures à 100 μm . Lorsque la dissipation visqueuse est importante il faut refaire le calcul complet en décomposant le champ de vitesse en une partie irrotationnelle et une partie rotationnelle⁴.

Enfin pour de grandes longueurs d'ondes, si l'amplitude n'est pas très petites il peut y avoir une dissipation supplémentaire lorsque l'écoulement généré par le vent devient turbulent, ou lorsque les vagues déferlent. La compression de la dissipation des vagues est encore un problème ouvert en océanographie.

2.3 Les ondes gravito-capillaires en eau peu profonde

2.3.1 Relation de dispersion en hauteur d'eau finie

En présence d'un fond en $z = -h$ où la vitesse normale du fluide 1 doit s'annuler, et en supposant un milieu 2 toujours infini, on peut reprendre l'analyse du § 2.2.1 et l'on trouve une nouvelle relation de dispersion en eau peu profonde.

$$\omega^2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2 \tanh(hk)} gk \tanh(hk) \left[1 + \left(\frac{k}{k_c} \right)^2 \right]. \quad (2.14)$$

4. P. H. LeBlond and F. Mainardi. The viscous damping of capillary-gravity waves. Acta Mechanica, **68** :203–222, 1987.

Avec toujours le même nombre d'onde de coupure $k_c = \sqrt{(\rho_1 - \rho_2)g/\gamma}$. Cette relation ne diffère significativement de l'équation 2.6 que si $\lambda > h$.

La figure 2.17 montre les fonctions de courant en présence d'un fond. Notez que la vitesse près de la paroi est parallèle au fond. Les trajectoires des particules en eau peu profonde sont des ellipses horizontales de plus en plus aplaties en s'approchant du fond (figure 2.18).

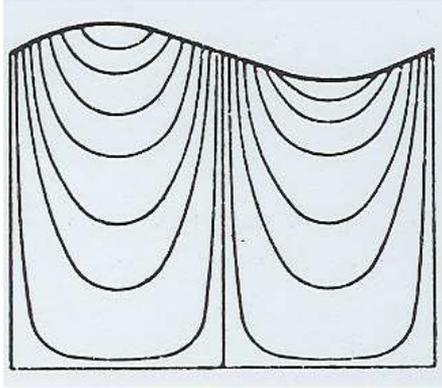


FIGURE 2.17 – Fonction de courant Ψ à un instant donné pour des ondes en eau peu profonde. D'après [13] page 180.

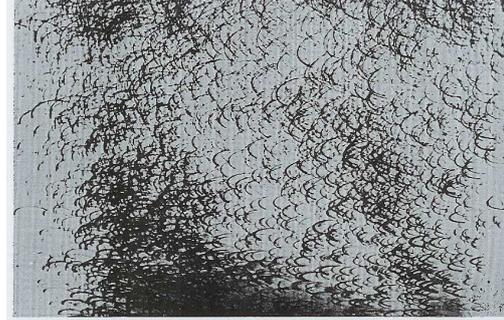


FIGURE 2.18 – Trajectoires des particules sous la vague en eau peu profonde, obtenues par une photo en pose longue. La forme elliptique de ces trajectoires est plus visible près du fond.

Exercice : Montrer, en effectuant un développement limité de la tangente hyperbolique et pour le cas air/eau ($\rho_2 \ll \rho_1$), qu'il existe une hauteur d'eau optimale pour que les ondes ne soient presque pas dispersives. C'est cette épaisseur $h = \sqrt{3\gamma/(\rho g)} \approx 4,8$ mm qui est choisie dans les « cuves à ondes » utilisées en enseignement pour illustrer le comportement ondulatoire de la lumière.

2.3.2 Cas des ondes très longues

Dans le cas des ondes de gravité de longueur d'onde grande devant la profondeur d'eau ($\lambda \gg h$) la relation de dispersion se simplifie et devient

$$\omega = \sqrt{gh}k.$$

La vitesse de phase et de groupe sont alors égales et constantes, $v_\varphi = v_g = \sqrt{gh} = \text{Cste}$. Ces ondes ne sont plus dispersives. Sous ces ondes le mouvement des particules fluides est simplement un mouvement horizontal oscillant de pulsation ω .

Ondes de marée

La marée est aussi une onde. Certes une onde de très grande longueur et de relativement faible amplitude, mais qui se déplace comme une vague à la surface de la Terre. Par exemple, lorsque la marée est haute à Brest, elle est encore basse dans le Pas-de-Calais et l'onde de marée mettra quelques heures à remonter la Manche avant de poursuivre sa route vers la mer du Nord. Si la Terre était composée entièrement de liquide, l'onde de marée présenterait deux longueurs d'ondes autour de la Terre et en ferait le tour en vingt-quatre heures. Mais à l'échelle de cette gigantesque longueur d'onde les océans sont peu profonds et la vitesse de propagation de l'onde de marée est limitée par

la profondeurs des mers. Si l'on regarde une carte de l'avancée de l'onde de marée dans la Manche (figure 2.19), on peut constater que cette onde va moins vite dans les endroits les moins profonds. On peut estimer sa vitesse de phase $v_\varphi \simeq 100$ km/h et sa longueur d'onde $\lambda \simeq 1000$ km, valeurs qui sont en bon accord avec une profondeur moyenne de la Manche d'environ 100 mètres. Par contre, si l'on faisait un calcul sur la base d'une propagation en eau profonde, c'est-à-dire en négligeant la présence du fond sous-marin, on trouverait une vitesse de phase peu réaliste de 4500 km/h pour l'onde de marée !

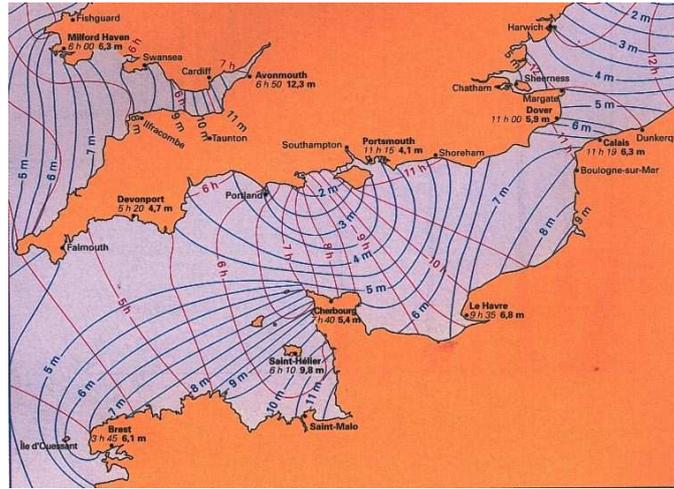


FIGURE 2.19 – Onde de marée remontant la Manche, montrant les isophases (en rouge) et les isoamplitudes (en bleu).

Energie des ondes en eau peu profonde

L'énergie des ondes est conservée. On a donc exactement la même expression pour l'énergie par unité de surface, que l'on soit en eaux profondes ou en eaux peu profondes (Eq. 2.13).

Le raidissement des ondes près de la plage (shoaling)

Lorsqu'une onde de gravité se déplace sur un fond qui remonte graduellement, l'onde ralentit car $v_\varphi = \sqrt{gh}$. Comme elle conserve sa pulsation, c'est la longueur d'onde qui va diminuer. Et comme l'onde va aussi conserver son énergie, c'est l'amplitude des ondes va augmenter. Pour trouver ces variations, il nous faut écrire que l'énergie par longueur d'onde est conservée (Eq. 2.13) et donc $\zeta_0^2 \lambda = \text{Cste}$ et que la pulsation de l'onde est aussi conservée⁵, soit $h/\lambda^2 = \text{Cste}$. Par conséquent près d'une plage la longueur d'onde diminue avec la hauteur d'eau locale comme $\lambda \sim h^{1/2}$ et l'amplitude augmente comme $\zeta \sim h^{-1/4}$. Près de la plage l'approximation linéaire ($\zeta_0 k < 1$) ne sera donc plus vérifiée et l'onde voit sa forme évoluer et finalement l'onde déferlera.

5. En présence de courant il peut y avoir une modification de la fréquence des vagues par effet Doppler. La fréquence apparente est alors $\omega - \vec{k} \cdot \vec{U}$ où U est la vitesse du courant.

Tsunami

On nomme maintenant *tsunami* ce qui auparavant s'appelait *lame de fond* ou *raz-de-marée*, bien que n'ayant aucun rapport avec la marée. Ce nom d'origine japonaise désigne les vagues engendrées par un glissement de terrain, une éruption volcanique ou un séisme sous-marin. Ces vagues de grande longueur d'onde au large peuvent voyager à grande vitesse sur de très grandes distances et déferlent puissamment en arrivant sur la côte. La longueur d'onde des tsunamis est de l'ordre de la taille de la zone de séisme, et elle peut donc dépasser la centaine de kilomètres. En comparaison, tous les océans peuvent être considérés comme peu profonds et la vitesse de déplacement d'un tsunami est donc seulement fonction de la profondeur de l'eau. En mer, les tsunamis se propagent sur de grandes distances avec une vitesse de plusieurs centaines de kilomètres par heure mais, étant de grande longueur d'onde et de faible amplitude au large, ils ne sont alors pas dangereux. En arrivant sur la côte, à cause de la diminution de la profondeur, les tsunamis ralentissent et voient leur amplitude grandir énormément : elle peut passer d'une amplitude à peine notable au large, de l'ordre de 10 centimètres, à quelques mètres en arrivant à la côte. Ils causent alors de très importants dommages. Pour des raisons d'activités volcanique et sismique, les tsunamis sont surtout observés sur les côtes du Pacifique. En France, le 16 octobre 1979, des glissements de terrain sous-marins, sans doute liés aux travaux d'agrandissement sur la mer de l'aéroport de Nice, causèrent deux tsunamis qui noyèrent douze personnes et détruisirent des centaines de bateaux dans le port. La mer se retira d'abord brutalement, puis revint sous la forme de deux vagues de trois mètres de haut qui frappèrent cinquante kilomètres de la côte.

Réfraction et diffraction

La vitesse de phase des ondes diminue lorsque la profondeur d'eau diminue. Les crêtes de vagues au-dessus de profondeurs d'eau différentes vont donc aller à des vitesses différentes et les plans de phase vont donc tourner. C'est cette *réfraction* des ondes que l'on peut observer près d'une plage, les vagues tournent progressivement pour que leur vecteur d'onde soit perpendiculaire à la plage. On peut aussi observer de la *diffraction* lorsqu'une onde pénètre par la petite ouverture d'un port ou fait le tour d'une petite île (figure 2.20).

2.3.3 Ressaut hydraulique

Le ressaut hydraulique est un phénomène très courant que l'on peut observer tous les jours dans l'évier d'une cuisine. Le filet d'eau qui tombe du robinet se brise au fond de l'évier en une nappe d'eau circulaire, d'abord mince près du point d'impact du jet, puis qui s'épaissit brutalement à une certaine distance de ce point, y formant ce que l'on nomme le ressaut circulaire. Près du centre l'écoulement du liquide est rapide et mince (U_1 et h_1), alors qu'à l'extérieur il est plus lent et plus épais ($U_2 < U_1$ et $h_2 > h_1$). Ici comme l'eau se déplace, la vitesse des ondes par rapport au fond est la somme de la vitesse des ondes par rapport à l'eau et de la vitesse de l'eau par rapport au fond. Etudions d'abord la région centrale. Comme cette zone est mince, les ondes sont assez lentes car en eau peu profonde, et elles n'arrivent donc pas à remonter le fort courant. L'eau les emporte vers l'aval. Le nombre de Froude $Fr_1 = \frac{U_1}{\sqrt{gh_1}}$ est grand devant 1, on parle d'écoulement torrentiel. Par contre, à l'extérieur du ressaut, par conservation du débit et compte tenu de la symétrie circulaire, la vitesse de l'eau devient plus faible et les ondes venues de l'extérieur vont pouvoir remonter le courant en direction du centre. Le nombre de Froude $Fr_2 = \frac{U_2}{\sqrt{gh_2}}$ est petit devant 1, on parle d'écoulement fluvial. Les ondes vont être bloquées sur le cercle où la vitesse des vagues est exactement égale et opposée à la vitesse du

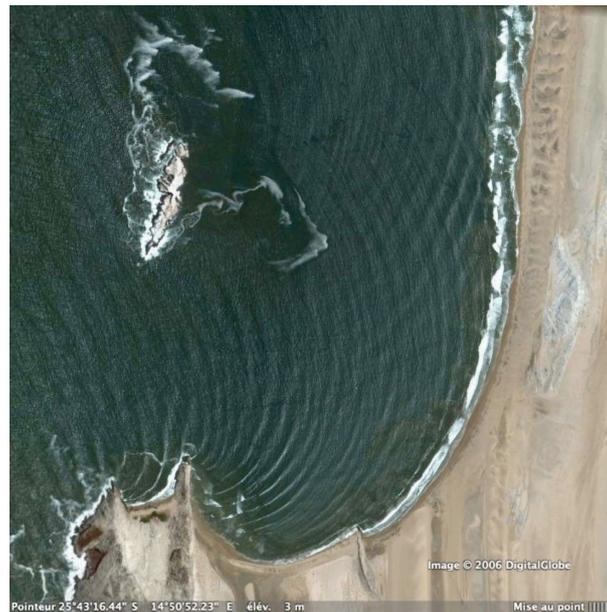


FIGURE 2.20 – Réfraction (dans la baie) et diffraction des vagues (derrière l'île), vu par satellite au large de la Namibie.

courant, c'est-à-dire pour $Fr_c = 1$, ce qui protège le centre de tout épaissement. L'accumulation de ces vagues sur ce rayon critique forme un ressaut circulaire correspondant à un changement brutal d'épaisseur. Sa forme exacte dépend du nombre de Reynolds et donc de la viscosité du fluide.

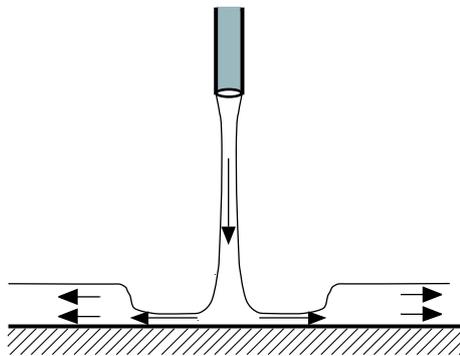


FIGURE 2.21 – Un ressaut hydraulique circulaire tel qu'on peut l'observer au fond d'un évier à fond plat. Un cercle limite une zone centrale mince et lisse d'une zone externe plus épaisse et agitée.

2.3.4 Mascaret

Un mascaret est l'équivalent d'un ressaut hydraulique, mais il se déplace. On peut en observer qui remonte le courant de certains estuaires lors des grandes marées montantes (figure 2.22). Comme pour le ressaut, le changement d'épaisseur est brutal. En effet, pour des profondeurs d'eau plus faibles

et donc des vitesses de l'eau élevées (ici en amont du mascaret), les ondes de surface ne peuvent pas remonter le fleuve alors qu'en aval du ressaut, où la profondeur est plus grande, elles le peuvent. Là encore, les ondes s'accumulent et produisent un changement brusque d'épaisseur. On peut les observer sous la forme d'une ou plusieurs vagues solitaires déferlantes. Certains fleuves sont ou ont été célèbres pour leur mascaret. Le mascaret de la Seine a disparu en 1963 suite à des travaux d'aménagement du fleuve. Avant cette date, il remontait jusqu'à Rouen. Dangereux pour la navigation, les mascarets sont par contre très recherchés par les surfeurs, qui peuvent ainsi surfer pendant plusieurs kilomètres la même vague ! Il reste deux mascarets visibles en France, l'un à l'embouchure de la Dordogne près de Saint-Pardon, l'autre plus petit autour du Mont-Saint-Michel, et d'autres bien plus impressionnants au Canada, en Chine ou au Brésil.



FIGURE 2.22 – Carte postale du mascaret sur la Seine à Quillebeuf (Seine-Maritime) vers 1930. Lors des grandes marées, la vague déferlante remontait le fleuve avec le flot (marée montante).

2.4 Les ondes non-linéaires

Lorsque l'amplitude des ondes n'est pas petite devant la longueur d'onde, l'analyse que nous avons développée n'est plus valable. Une première solution est de développer aux ordres suivants en fonction du petit paramètre $\epsilon = \zeta_0/\lambda$.

Stokes a montré qu'à l'ordre suivant il existe un écoulement moyen généré dans la direction de propagation des ondes. Les trajectoires des particules ne sont plus fermées, c'est ce qu'on appelle la dérive de Stokes (cf § 2.2.7 page 34).

Dans le cas des ondes de gravité (tension de surface négligée), l'ordre 0 (houle sinusoïdale) du développement en ϵ porte le nom de houle d'Airy (1845). L'ordre 1 porte le nom de houle de Stokes, l'ordre 2 de houle de Rayleigh, etc. Stokes a montré en 1847 qu'après quelques ordres apparaît lorsque $\epsilon = 14\%$ une singularité à 120° au sommet des vagues.

Il existe aussi des solutions non irrotationnelles, comme la houle trochoïdale (ou cycloïdale) de Gerster (1802).

En eau peu profonde, il existe d'autres modèles de houle, dites houles cnoïdales (qui ressemblent à la forme de ces fonctions elliptiques) dont la limite pour une période infinie est le soliton étudié par S. Russel à partir de 1834, solution de l'équation de Korteweg et De Vries (KdV, 1895).

2.4.1 Le soliton de Russel

La découverte de ce qui devait ensuite s'appeler un « soliton » date de 1834. Cette année-là, un jeune écossais, Scott RUSSEL, écrivait :

« Je ne puis donner une idée plus nette du phénomène qu'en décrivant les circonstances dans lesquelles il m'apparut pour la première fois. J'observais le mouvement d'un bateau que deux chevaux tiraient rapidement dans un canal étroit, lorsque ce bateau vint à s'arrêter tout à coup : mais il n'en fut pas de même de la masse d'eau qu'il avait mise en mouvement dans le canal; elle s'accumula autour de la proue dans un état de violente agitation, puis, laissant tout à coup le bateau en arrière, se mit à cheminer en avant avec une grande vitesse sous la forme d'une seule grande ondulation, dont la surface était arrondie, lisse et parfaitement déterminée. Cette onde continua sa marche dans le canal sans que sa forme et sa vitesse parussent s'altérer en rien. Je la suivis à cheval et la retrouvai cheminant encore avec une vitesse de 8 à 9 milles à l'heure et conservant sa forme initiale (environ 30 pieds de longueur sur 1 pied à 1 1/2 pied de hauteur). La hauteur de l'onde diminuait graduellement, et après l'avoir suivie pendant un mille ou deux, je la perdis dans les sinuosités du canal. »

Il y a quelques années l'expérience initiale de Russel a été réalisée à nouveau dans le même canal par des élèves d'une école écossaise (<http://www.ma.hw.ac.uk/solitons/press.html>). Il est à noter que ces canaux écossais sont assez particuliers car ils ont une profondeur faible, de l'ordre du mètre. Russel a étudié la forme et la vitesse de déplacement de ces ondes pendant plus de dix ans, y compris en construisant un canal d'étude au fond de son jardin. Malheureusement pour lui, ce n'est que plus récemment que ces ondes solitaires, qui peuvent se propager sur de très grandes distances sans changer de forme ni s'atténuer, ont été redécouvertes. Les solitons sont maintenant très utilisés, en particulier en télécommunication pour transmettre de l'information sur de grandes distances dans les fibres optiques transatlantiques (il s'agit alors d'ondes électromagnétiques).

L'onde solitaire a pour forme :

$$\zeta = h + \frac{A}{\cosh^2\left(\frac{x-ct}{\Delta}\right)}$$

où l'amplitude est reliée à la largeur du soliton par $A = \frac{4}{3} \frac{h^3}{\Delta^2}$ (figure 2.23). Cette onde se déplace à la célérité $c = \sqrt{g(h+A)}$.

Exercice : Vérifier que cette onde est solution exacte de l'équation non-linéaire de KdV (Korteweg-de Vries) :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{3c_0}{2h} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{c_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0.$$

Le troisième terme est le terme non linéaire, le quatrième représente la dispersion. Que vaut c_0 ?

Pour l'établissement de cette équation de KdV, on pourra consulter la référence [12]. Pour cette forme particulière, la dispersion des ondes de gravité est compensée exactement par un terme de focalisation (de dispersion négative) d'origine non-linéaire.

Pour en savoir plus :

- [3] O. Darrigol. *Worlds of Flow : A History of Hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*. Oxford University, 2005.
- [6] P.K. Kundu, *Fluid Mechanics*, Academic Press, 1990. Chap. 7, pp184-247.
- [9] J. Lighthill, *Waves in fluids*, Cambridge University Press, 1978.
- [16] G. Whitham, *Linear and nonlinear waves*, John Wiley and sons, 1974.



FIGURE 2.23 – Forme du soliton solution de l'équation de KdV.

- [4] M. Peyrard et T. Dauxois. *Physique des Solitons*, Collections "Savoirs Actuels, EDP Sciences-CNRS Editions (2004).
- [12] M. Rieutord. *Une introduction à la dynamique des fluides*, Masson (1997).

Sur le web :

- *Waves in Fluids*, A.E. Bryson, National Committee for Fluid Mechanics Films, <http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html>
- Cours de l'IFREMER : http://www.ifremer.fr/lpo/cours/vagues_ondes/index.html
- <http://www.ocean.washington.edu/research/gfd/hydraulics.html>
- sur les eaux mortes http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/XML/db/csphysique/metadata/LOM_CSP_Phenomene-eaux-mortes.xml
- Sur le mascaret de la Seine <http://www.univ-lehavre.fr/cybernat/pages/mascaret.htm>
- Sur les solitons : <http://www.ma.hw.ac.uk/solitons/press.html>
- Pour voir différents types d'ondes : <http://www.kettering.edu/physics/drussell/Demos/waves/wavemotion.html>.

Bibliographie

- [1] Antoine Chaigne. *Ondes acoustiques*. Editions Ecole Polytechnique, 2011.
- [2] Antoine Chaigne and Jean Kergomard. *Acoustique des instruments de musique*. Belin, 2008.
- [3] Olivier Darrigol. *Worlds of Flow : A Hystory of Hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*. Oxford University, 2005.
- [4] M. Peyrard et T. Dauxois. *Physique des Solitons*. EDP Sciences, 2004.
- [5] Richard Feynman, Robert Leighton, and Matthew Sands. *Le cours de physique de Feynman*. Dunod, 2013.
- [6] P.K. Kundu. *Fluid Mechanics*. Academic Press, 1990.
- [7] Sir H. Lamb. *Hydrodynamics*. Sixth edition, Cambridge University Press, 1995.
- [8] L. D. Landau and E. M. Lifchitz. *Fluid mechanics*. Pergamon, New-York, 1963.
- [9] J. Lighthill. *Waves in fluids*. Cambridge University Press, 1978.
- [10] Joseph Pedlosky. *Waves in the ocean and atmosphere : introduction to wave dynamics*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [11] John William Strutt Rayleigh. *The theory of sound. Vol. 1 et 2*. Macmillan and co.(London), 1877.
- [12] Michel Rieutord. *Une introduction à la dynamique des fluides*. Masson, 1997.
- [13] Arnold Sommerfeld. *Mechanics. Lectures on Theoretical Physics, Vol I*. Academic Press Inc., 1953.
- [14] Jearl Walker. *Le carnaval de la physique*. Dunod, 1980.
- [15] Alan J Walton. *Three phases of matter*. Oxford University Press, 1983.
- [16] G.B. Whitham. *Linear and nonlinear waves*. John Wiley and sons, 1974.