

# LES RUPTURES DE SYMETRIES DANS UN SYSTEME BIDIMENSIONNEL DE TOURBILLONS

*Les transitions successives que subit un système hydrodynamique soumis à des contraintes croissantes, peuvent être interprétées comme des ruptures des symétries spatiales et de l'invariance temporelle. C'est ainsi que récemment le comportement temporel lors de l'évolution vers le chaos a été largement étudié dans des systèmes où la structure spatiale est bloquée. Nous présentons ici une visualisation d'un ensemble stable de tourbillons bidimensionnels, où toutes les transitions s'interprètent comme des ruptures progressives de la symétrie spatiale de l'écoulement.*

## **L'instabilité de cisaillement**

Les vagues de la mer sont la conséquence d'une instabilité de cisaillement. Le vent souffle sur la surface de l'eau initialement immobile et la déstabilise. Celle-ci ondule puis forme des vagues qui se propagent et grossissent, et qui déferleront si le vent est suffisamment fort.

Dans cet exemple il existe bien un cisaillement de vitesse, mais il agit à l'interface entre deux fluides : l'air et l'eau. Il existe alors deux effets stabilisants, la tension superficielle et la gravité. L'instabilité de cisaillement pure n'est observée qu'en l'absence de ces forces de rappel, lorsque le profil des vitesses au sein d'un fluide unique présente un point d'inflexion. Elle est généralement étudiée dans la configuration expérimentale dite de la couche de mélange (*figure 1*), où on injecte à l'entrée d'une veine d'étude un fluide à deux vitesses différentes mais parallèles  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ . Cette situation est spontanément instable ; immédiatement après la mise en contact, l'interface se met à onduler, puis déferle en une série de tourbillons parallèles et de même sens, qui vont grossir puis s'apparier pour former de plus grandes structures. Ensuite des perturbations tridimensionnelles s'amplifient et l'écoulement devient rapidement turbulent.

Cette instabilité présente plusieurs caractéristiques spécifiques :

- Elle se développe dans une géométrie ouverte. Il n'existe pas d'état stationnaire de l'écoulement ni de paramètre de contrôle de celui-ci.
- La formation et l'appariement des tourbillons sont des phénomènes locaux présentant une faible cohérence spatiale ou temporelle. L'allée de tourbillons n'est pas strictement périodique et sa longueur d'onde n'a qu'un sens statistique.

## **La géométrie circulaire, comportement général de l'écoulement**

Nous avons introduit une nouvelle géométrie qui permet d'étudier l'instabilité de cisaillement dans des conditions toutes différentes, qui rappellent celles où on étudie d'autres instabilités hydrodynamiques telles que l'instabilité de Rayleigh-Bénard ou de Taylor-Couette. Dans celles-ci, la géométrie est fermée, et l'état de l'écoulement résulte d'un équilibre entre une contrainte déstabilisante imposée de l'extérieur et l'influence stabilisante de la dissipation visqueuse. Le développement de l'instabilité est temporel, caractérisé par une série de bifurcations atteintes pour des valeurs croissantes d'un paramètre de contrôle.

Le type de cellule que nous utilisons est représenté sur la *figure 2*.

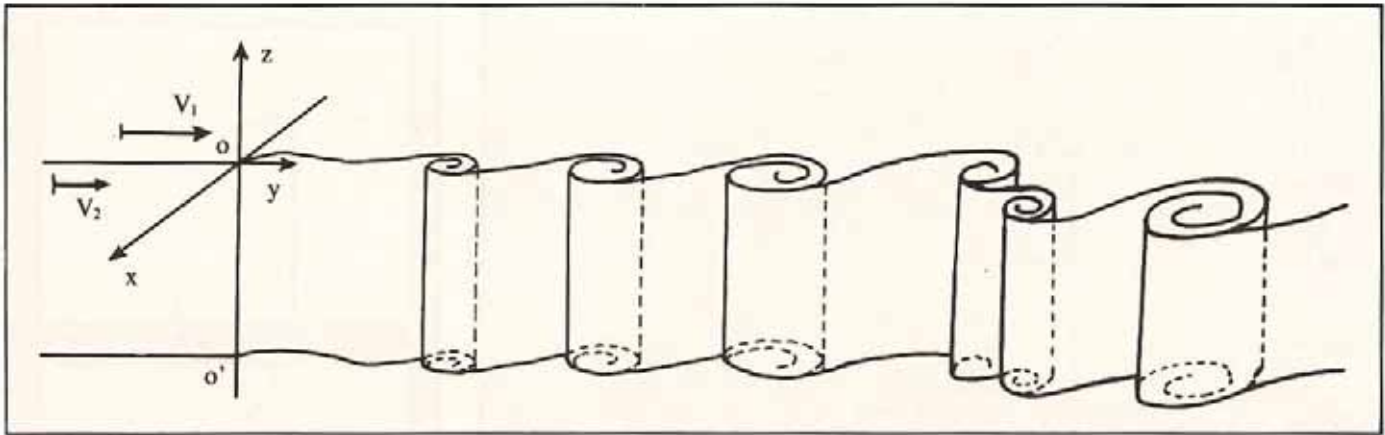
Les parois de la cellule entraînent le fluide en deux rotations solides de vitesses angulaires  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  différentes, séparées par une couche

### *Encadré n° 1*

#### **La visualisation d'un écoulement gazeux bidimensionnel par les membranes de savon**

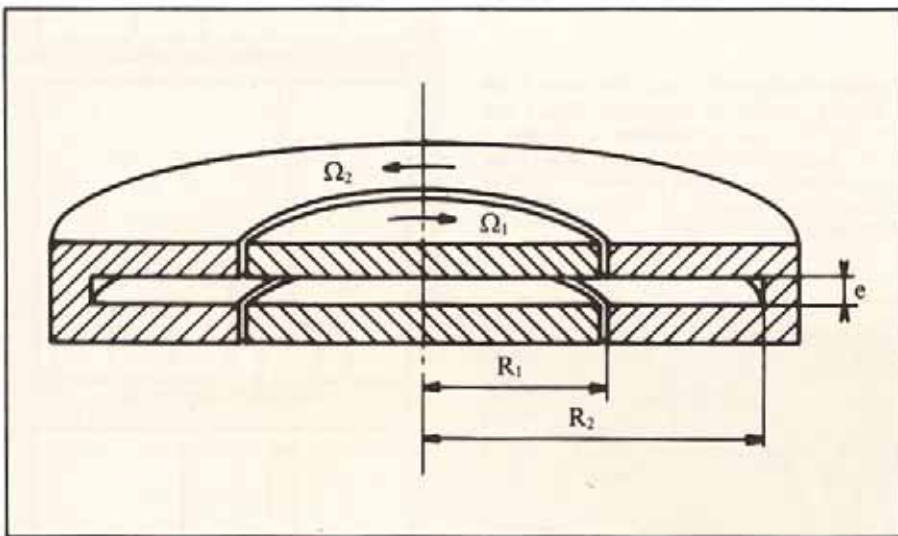
Lorsqu'on regarde une bulle de savon au soleil, on voit à sa surface des irisations qui sont déformées par le passage du moindre souffle d'air.

Ces irisations sont créées par les interférences localisées dues à la faible épaisseur des films d'eau savonneuse (de l'ordre du micromètre). C'est cette propriété que nous utilisons. En lumière monochromatique de sodium, les franges claires ou obscures dessinent les lignes d'égale épaisseur du film. Ce film ayant une viscosité faible (bien que supérieure à celle de l'eau pure) et étant très mince, il est facilement entraîné par les mouvements de l'air environnant si ceux-ci sont parallèles à son plan. Dans notre cellule la membrane est placée dans le plan horizontal de symétrie où tous les mouvements sont parallèles à sa surface. Les mouvements de rotation engendrent des forces centrifuges qui l'amincissent localement. Il en résulte l'apparition autour de chaque tourbillon de plusieurs franges elliptiques très voisines des courbes d'isovorticité de l'écoulement. La membrane fournit donc une bonne visualisation de longue durée. Enfermée dans une cellule où l'air est saturé d'humidité elle peut résister, tout en évoluant lentement, pendant une dizaine de minutes.



**Fig.1 : La couche de mélange**

La couche de mélange cisailée qui sépare deux fluides de vitesses différentes est spontanément instable. A partir de la mise en contact en  $OO'$  des fluides, on observe une oscillation qui va déferler pour former des tourbillons parallèles. Ceux-ci vont tendre à s'apparier pour former des structures plus larges. Finalement l'écoulement deviendra tridimensionnel puis turbulent.



**Fig. 2 : La cellule expérimentale**

Le fluide est enclos dans un cylindre vertical de faible hauteur  $e$ . La zone centrale de chaque extrémité du cylindre est constituée d'un disque de rayon  $R_1$  tournant à la vitesse  $\Omega_1$  tandis que le reste de la cellule tourne à  $\Omega_2$ . Avant le seuil, le fluide contenu dans la cellule est presque partout en rotation solide, sauf dans une zone torique de rayon  $R_1$  soumise au cisaillement. La largeur maximum de cette zone, à mi-hauteur de la cellule, est de l'ordre de  $e$ . Un film d'eau savonneuse tendu dans ce plan médian fournit une visualisation de l'écoulement. Il est observé à travers une face supérieure transparente.

cisailée circulaire de rayon  $R_1$ . Le fluide utilisé est l'air, et pendant le montage un film d'eau savonneuse est tendu dans le plan médian, perpendiculaire à l'axe de rotation de la cellule. Ce film fournit une visualisation dont le principe est décrit dans l'encadré n° 1.

On montre que l'état de l'écoulement est défini par un nombre de Reynolds qui représente le rapport des forces inertielles de déstabilisation sur les forces visqueuses de dissipation. Dans le cas présent :

$$Re = |\Omega_1 - \Omega_2| R_1 e / (\mu/\rho)$$

où  $|\Omega_1 - \Omega_2| R_1 e$  est la différence de vitesse linéaire dans la zone cisailée,  $e$  l'épaisseur de la cellule,  $\mu$  la viscosité dynamique et  $\rho$  la masse volumique du fluide. La valeur du nombre de Reynolds qui définit

l'écoulement peut être contrôlée de l'extérieur en faisant varier la différence des vitesses. Lorsqu'on augmente la contrainte régulièrement, il apparaît une suite de transitions que nous allons décrire en termes de ruptures successives des symétries de l'écoulement.

Pour de faibles valeurs de  $Re$ , on observe d'abord un état axisymétrique avec une variation continue de la vitesse dans une zone cisailée qui s'étend sur une largeur comparable à l'épaisseur  $e$  de la cellule. A une valeur critique  $Re_c = 76$ , la symétrie de révolution est rompue et une figure régulière et stable de  $m_c$  tourbillons apparaît. La théorie linéaire de la déstabilisation de l'écoulement fait prévoir une longueur d'onde caractéristique  $\lambda_c \approx 8 e$  correspondant à la distance entre les tourbillons. Dans le cas d'un

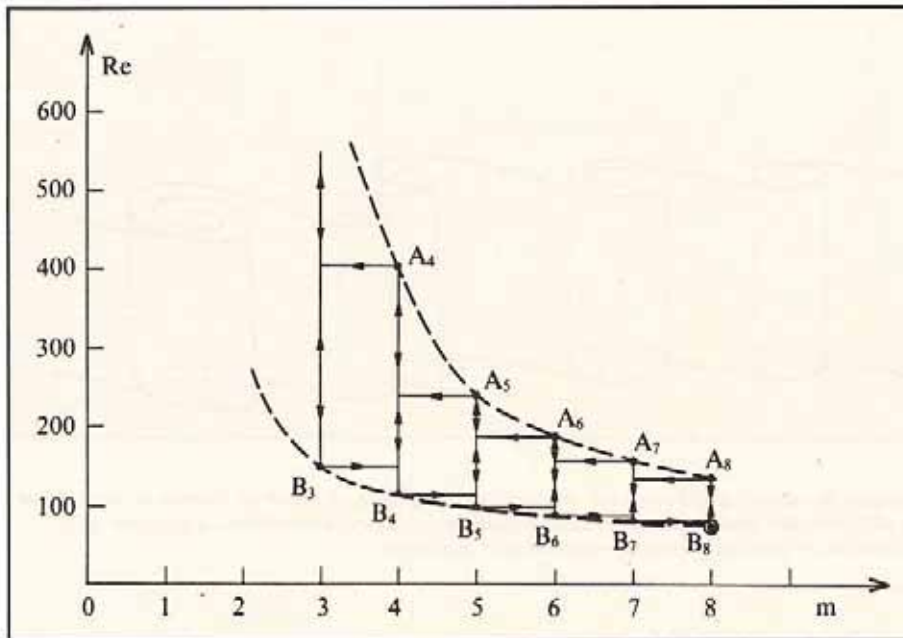
cisaillement refermé sur lui-même, il y a quantification du nombre de tourbillons sur le périmètre du cercle. On observe donc au seuil une figure périodique avec :

$$m_c = 2 \pi R_1 / \lambda_c \approx \pi \Gamma / 4$$

où  $\Gamma = R_1/e$  est le rapport d'aspect de la cellule.

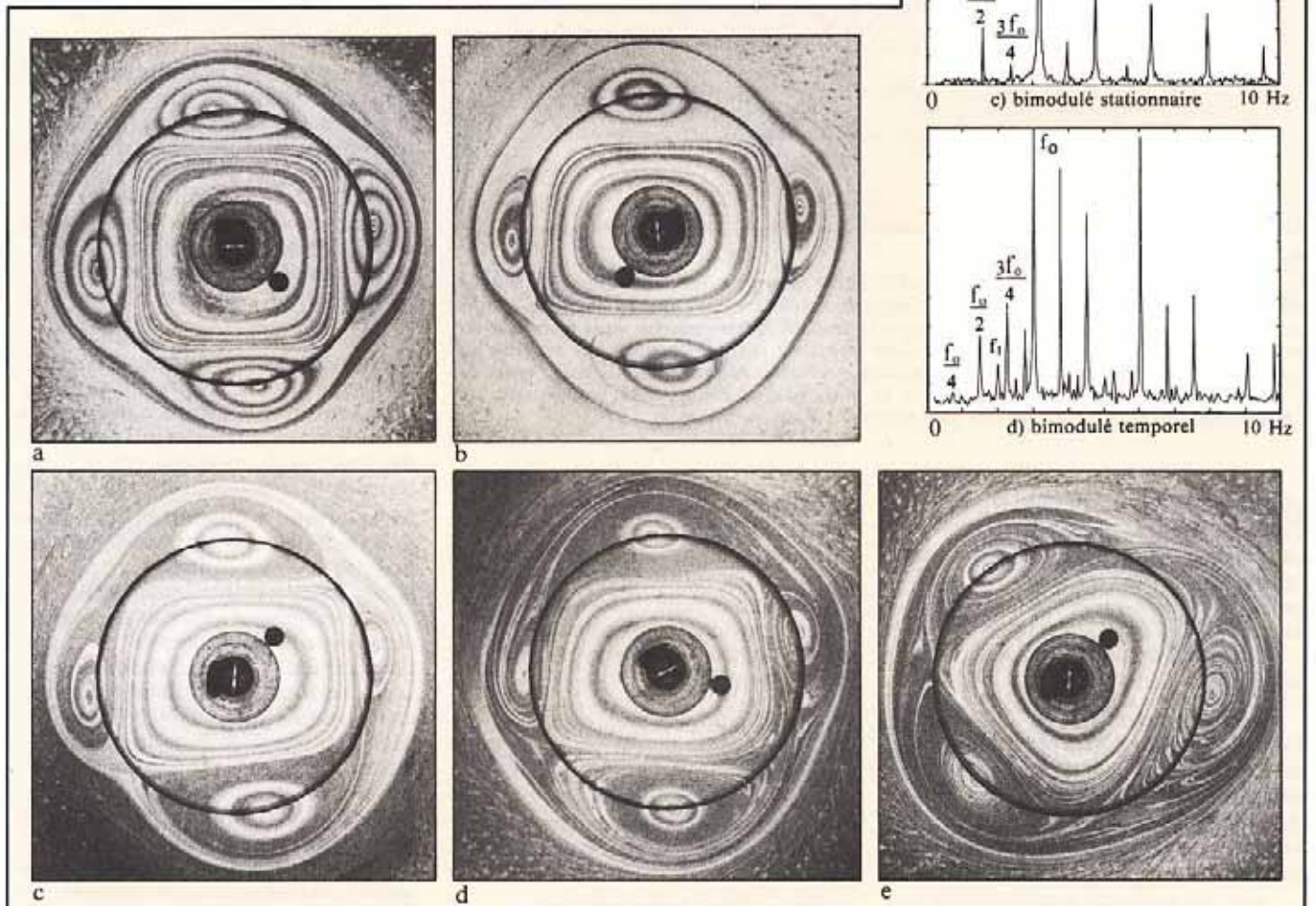
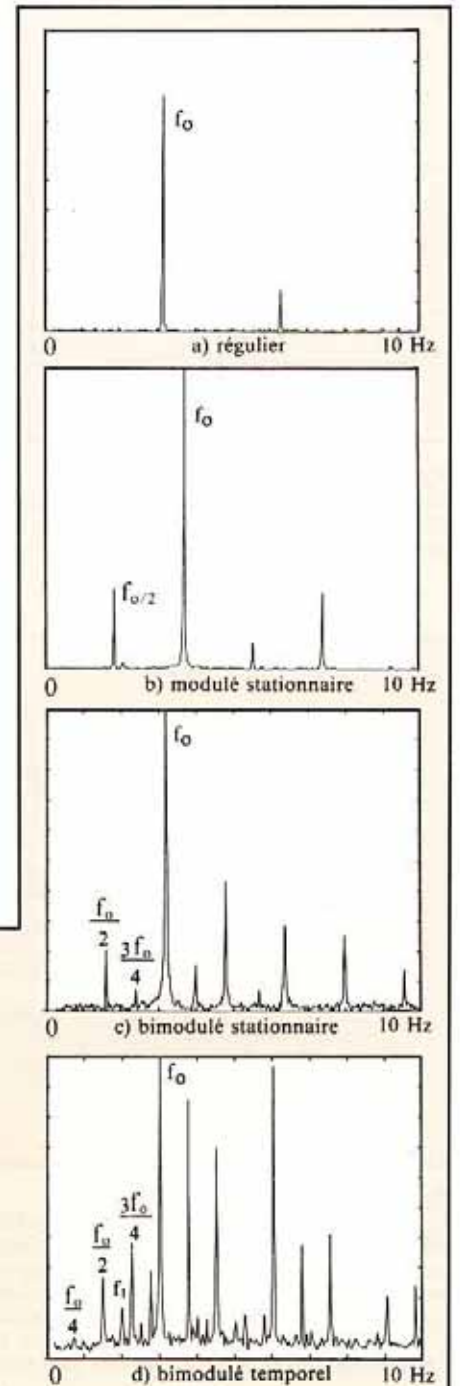
Cette figure est stable dans un certain domaine de valeurs de  $Re$ . L'évolution lorsqu'on continue à augmenter  $Re$  est montrée sur la figure 3. On assiste à des appariements successifs de tourbillons qui font passer d'un mode à  $m_c$  tourbillons à un mode à  $m_c - 1$ , puis  $m_c - 2$ . Les transitions sont séparées par des plages de stabilité de chacun de ces modes. Si l'on décroît la contrainte, les transitions inverses sont observées mais avec un fort hystérésis.

Nous allons maintenant décrire avec plus de détail le processus même de la transition d'un mode  $m$  au mode  $m-1$ . Dans tous les cas où le nombre des tourbillons est grand, ces transitions sont localisées et brutales. Mais lorsque le nombre de tourbillons  $m$  est inférieur à 8, les transitions ont lieu par une succession de bifurcations proches les unes des autres qu'on peut analyser en termes de rupture des symétries de l'écoulement. Chacune conduit à un nouvel état qui a un domaine de plus en plus étroit de stabilité. Nous ne décrirons pas ici la dynamique des transitions mais les structures stables qui apparaissent. Nous nous placerons dans deux cas particuliers : les transitions de quatre à trois tourbillons et les transitions de cinq à quatre tourbillons. Nous utilisons deux outils expérimentaux distincts, la visualisation par le film d'eau savonneuse d'une part, et la mesure locale par anémométrie laser d'une composante de la vitesse d'autre part. Une figure de tourbillons est en rotation dans le repère du laboratoire



**Fig. 3 : Evolution du nombre de tourbillons**

Modes successifs observés lors d'une croissance du nombre de Reynolds de 0 à 500 suivi d'une décroissance. Rapport d'aspect  $\Gamma = R_1/e = 10$ . En augmentant la contrainte depuis une valeur nulle du nombre de Reynolds, on voit d'abord apparaître  $m_8$  tourbillons (ici 8), puis la figure se transforme et l'on se déplace dans le plan  $(m, Re)$  sur la courbe en escalier du haut (reliant les sommets  $A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ ). En diminuant la contrainte, le système emprunte l'escalier du bas (qui relie  $B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8$ ). Sur un mode donné tout le segment  $B_m A_m$  est accessible en variant lentement la contrainte : c'est la plage d'hystérésis du mode  $m$ .



**Fig. 4 : Transition du mode  $m = 4$**

Séquence des états stationnaires successifs par lesquels passe un mode à quatre tourbillons avant de finalement transiter vers un mode à trois tourbillons. On voit la réduction de l'ordre de la symétrie, celle-ci est de 4 en a, de 2 en b, de 1 en c ; puis en d se rompt l'invariance temporelle. En e le système se rééquilibre sur  $m =$  trois tourbillons. Les spectres a, b et c montrent la fréquence  $f_0$  qui correspond au défilement des tourbillons devant le point de mesure fixe dans le repère du laboratoire, ainsi que ses sous-harmoniques successifs. Puis la fréquence temporelle  $f_1$  apparaît sur le spectre d.

à la vitesse  $\Omega_T$  (elle-même fonction des vitesses angulaires  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ ). En faisant l'analyse de Fourier de la vitesse mesurée en un point fixe de ce repère et suffisamment proche de la zone cisailée, on voit apparaître une fréquence  $f_0 = m(\Omega_T/2\pi)$  qui correspond à la fréquence de passage des tourbillons devant ce point. On observe ainsi, par une fréquence temporelle apparente, la périodicité spatiale du système.

### Transition de quatre à trois tourbillons

La figure 4 montre les états successifs de l'écoulement. Le mode est d'abord régulier puisque les quatre tourbillons sont égaux et équidistants. La seule fréquence présente dans le spectre,  $f_0$ , correspond au passage des tourbillons. Si on augmente la contrainte, il existe un seuil au-delà duquel deux tourbillons grossissent au détriment des deux autres (figure 4b). La symétrie spatiale d'ordre 4 est remplacée par une symétrie d'ordre 2. La longueur d'onde a doublé. Cela se traduit sur le spectre par l'apparition d'un pic sous-harmonique à  $f_0/2$ . Au-delà d'un second seuil, apparaît dans le spectre un deuxième sous-harmonique  $f_0/4$  qui module tous les pics (en particulier  $f_0$  à cause des non-linéarités des phénomènes). La symétrie d'ordre 2 a été rompue, les tourbillons sont devenus tous différents (figure 4c), et il n'existe donc plus de symétrie spatiale. Jusqu'à ce point l'écoulement est stationnaire et il y a donc encore invariance temporelle. C'est cette invariance qui va disparaître à son tour au-delà d'un troisième seuil. Une nouvelle fréquence  $f_1$  sans rapport avec les précédentes apparaît. Elle correspond à la pulsation temporelle de la taille des tourbillons, que la photo d que nous présentons ici ne peut montrer mais qui est clairement observée sur des enregistrements filmés. Ce phénomène prenant de l'amplitude, un petit tourbillon est finalement absorbé par un de ses voisins et la figure se rééquilibre pour former un mode  $m = 3$  régulier.

### Transition de cinq à quatre tourbillons

Si le nombre  $m$  de tourbillons est impair le même processus de déstabilisation ne peut exister, les sous-harmoniques spatiaux n'étant pas quantifiés le long du périmètre du cercle. Nous allons le montrer dans le cas  $m = 5$ .

Dès la première déstabilisation du mode régulier on voit se rompre simultanément la symétrie spatiale et l'invariance temporelle. Ceci se

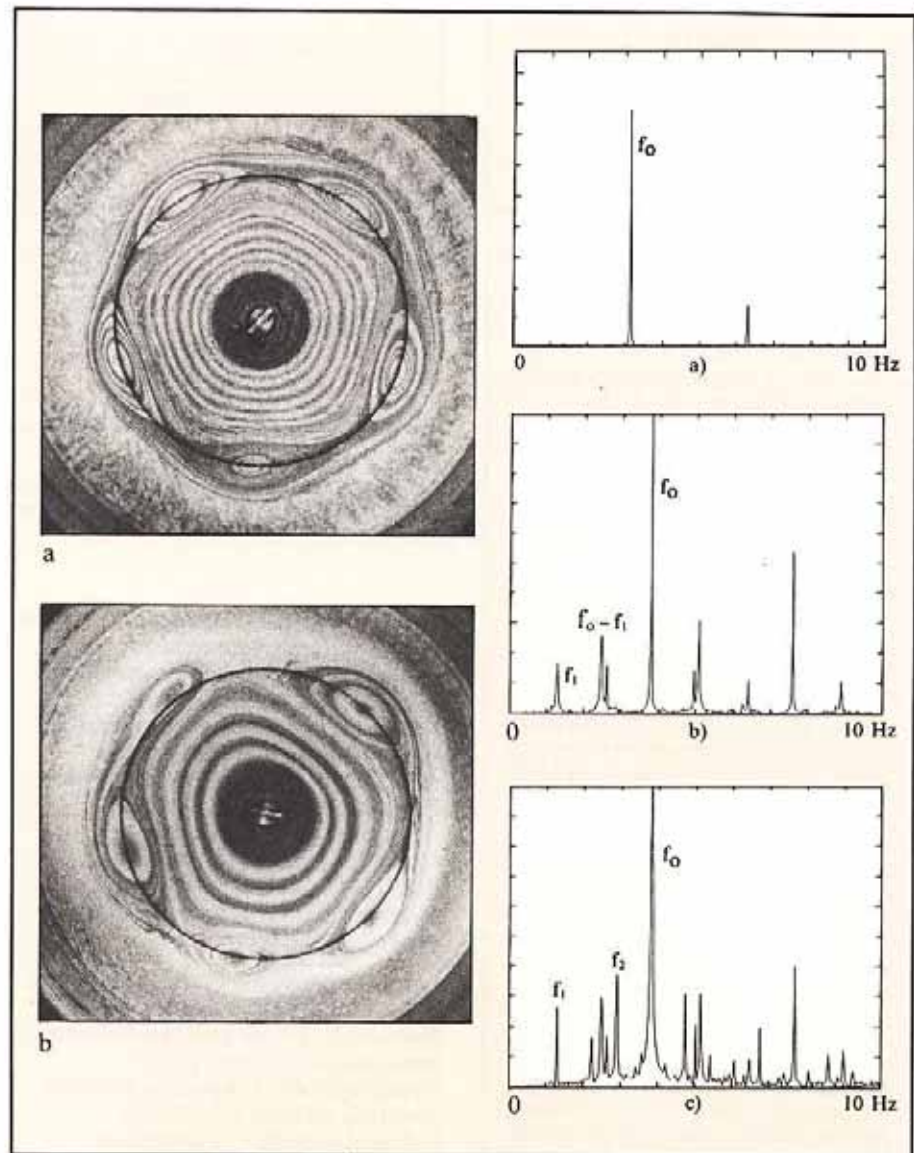


Fig. 5 : Transition d'un mode  $m = 5$

Lorsque le mode est impair, c'est une modulation temporelle qui apparaît lors de la déstabilisation. La photo a représente le mode régulier auquel correspond la fréquence  $f_0$  sur le spectre a. Ensuite sur la photo b, le mode devient dépendant du temps et le spectre b montre une première fréquence temporelle  $f_1$ . Plus loin une deuxième fréquence temporelle  $f_2$  croît (spectre c), enfin le système transite vers un mode régulier à quatre tourbillons.

manifeste par l'apparition d'une fréquence temporelle  $f_1$  dans le spectre. L'observation montre qu'elle correspond à la propagation d'une onde qui module l'amplitude et la position des tourbillons (figure 5). Cette onde progressive peut être interprétée comme une onde ayant  $(m + 1)/2$  maxima le long du périmètre et se propageant dans un sens, ou comme une onde ayant  $(m - 1)/2$  maxima se propageant en sens contraire. En effet les modulations des tourbillons résultant de ces deux ondes sont indiscernables (la taille des tourbillons représente l'amplitude de ces ondes en des points discrets). Pour une valeur plus grande de  $Re$  on voit apparaître une seconde fréquence  $f_2$  dont l'effet n'est pas observé visuellement. Elle précède de peu la transition par absorption d'un petit tourbillon, qui conduit au réarrangement en quatre tourbillons égaux.

### Une simulation numérique

Depuis quelques années, la simulation numérique directe d'écoulements hydrodynamiques a fait des progrès considérables grâce à l'augmentation de la puissance de calcul des grands ordinateurs. Dans les cas bidimensionnels où la résolution globale est suffisante, les simulations numériques viennent compléter, et parfois même remplacer, l'expérience. Remarquons cependant que dans la plupart des cas, les contraintes propres aux techniques de calcul font que souvent la simulation et l'expérience ont des conditions aux limites différentes, si bien que la comparaison des résultats est difficile.

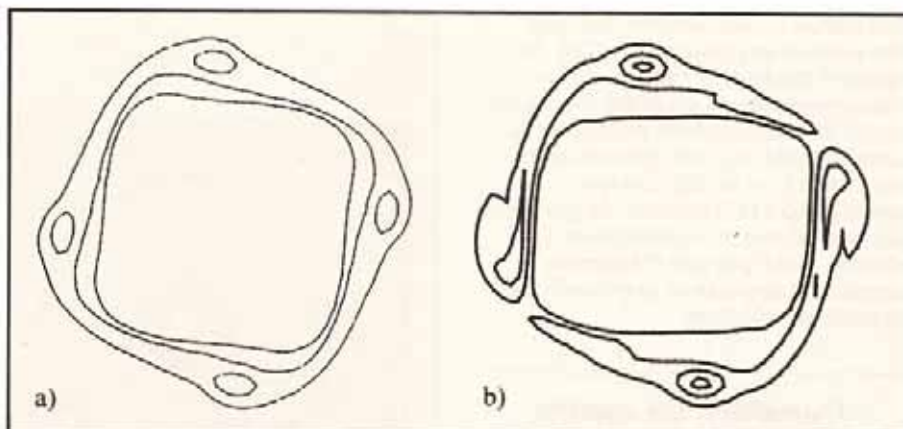
Dans le cas de notre expérience, nous avons montré qu'en adaptant un

**La simulation numérique**

Le comportement de l'instabilité étant bidimensionnel, il a été possible d'adapter un code pseudo-spectral de simulation numérique développé au laboratoire de Météorologie Dynamique par C. Basdevant pour étudier la turbulence bidimensionnelle. Ce code consiste à écrire l'équation de Navier-Stokes à deux dimensions pour le vecteur vorticité  $\omega = \text{rot } v$ . Dans le cas d'un écoulement bidimensionnel, ce vecteur a l'avantage d'avoir une seule composante. Cette équation est alors résolue à chaque pas de temps en utilisant les avantages des méthodes spectrales pour le calcul des dérivées spatiales, et des méthodes d'éléments finis pour les autres termes. Le maillage est composé de  $128 \times 128$  points, et les structures à petite échelle sont dissipées par une viscosité numérique ajustée.

Pour adapter ce code à notre écoulement, il a fallu introduire le forçage par les parois horizontales qui crée un rappel vers l'écoulement laminaire axisymétrique. A chaque pas de temps, il est possible d'obtenir les champs de vorticité, soit sur table traçante, soit sur un système vidéo, ce qui permet l'analyse de la dynamique des tourbillons. Il est aussi possible de mesurer la vitesse en un point, de tracer son évolution temporelle et son spectre. La concordance entre les comportements observés expérimentalement et numériquement a été remarquable car étendue à toutes les bifurcations tant que l'écoulement réel ne devenait pas tridimensionnel. Notons toutefois une difficulté spécifique dans l'usage de la simulation numérique : une seconde d'expérience représente 1000 secondes de temps de calcul sur le processeur vectoriel utilisé (capacité de calcul : 12 MFLOPS). Pour observer un temps de stabilisation de mode de 30 secondes, il faudrait huit heures de calcul. Alors qu'il est facile expérimentalement de laisser un mode se stabiliser, on n'est jamais sûr dans la simulation numérique d'avoir atteint un régime stationnaire et non un état transitoire particulièrement long.

La figure 6 présente un mode  $m = 4$  régulier et un mode doublement modulé obtenu par cette simulation. On peut comparer ces courbes d'isovorticité aux photographies des figures 4a et c.



**Fig. 6 : Deux modes  $m = 4$  simulés**  
Courbes d'isovorticité obtenues par simulation numérique d'un mode à quatre tourbillons régulier et d'un mode modulé spatialement. Ces courbes sont tout à fait comparables aux photos des figures 4a et 4c.

code numérique (voir encadré n° 2), on peut simuler directement l'écoulement dans le plan médian de la cellule. Nous retrouvons l'évolution générale avec le seuil d'apparition des tourbillons, la sélection de leur nombre d'onde et l'évolution de celui-ci avec la contrainte. Il permet aussi de retrouver dans les cas étudiés en détail ( $m = 4$  et  $m = 5$ ) toute la séquence des bifurcations observées expérimentalement.

La comparaison entre l'expérience et sa simulation est doublement fructueuse. D'une part la simulation permet de confirmer que la dynamique de la séquence des états observés est bien strictement bidimensionnelle ; d'autre part, l'expérience permet de tester les approximations faites dans le modèle numérique en comparant quantitativement ses résultats avec ceux de l'expérience.

**Conclusion**

Pour conclure, remarquons que les instabilités hydrodynamiques, comme celle de Rayleigh-Bénard par exemple, montrent aussi des bifurcations successives qui dépendent du nombre et de la nature des degrés de liberté. En « grande boîte », ce nombre est d'autant plus grand dans ces expériences de convection que l'écoulement est

tridimensionnel. Dans ce cas plusieurs types de rupture de symétries peuvent apparaître successivement et la structure spatiale devient généralement complexe. En « petite boîte », les degrés de liberté spatiaux se trouvent bloqués. C'est l'invariance dans le temps qui joue le rôle essentiel. Elle est d'abord rompue par l'apparition d'une périodicité temporelle dont l'évolution ultérieure se fait par doublements successifs de la période (cascade de Feigenbaum).

La spécificité de notre expérience tient au fait qu'une seule symétrie spatiale joue un rôle important : l'invariance de rotation autour de l'axe central. Sa rupture vient de l'apparition d'une périodicité spatiale lors de la formation de tourbillons. Dès lors (sous réserve que la quantification le long du cercle le permette), l'évolution va se faire par doublements successifs de la longueur d'onde. Cette évolution qui est l'équivalent spatial de la cascade temporelle de doublement de période, en diffère car elle ne conduit pas à un régime chaotique stable ; le système échappe au chaos en transitant vers un nouveau mode.

*Article proposé par M. Rabaud et Y. Couder, tél. 43 29 12 25 p. 34, 47*  
*Les résultats présentés ont fait l'objet des thèses de M. Rabaud (1982) et J.M. Chomaz (1985).*