

Déformation des coques élastiques

Ludovic PAUCHARD, Yves POMEAU et Sergio RICA

Laboratoire de Physique Statistique de l'École Normale Supérieure associé au CNRS, 24, rue Lhomond, 75231 Paris cedex 05, France.

Résumé. Nous étudions le contact d'une coque élastique avec un plan rigide. L'expérience montre une transition du premier ordre entre deux configurations différentes : la première est caractérisée par un contact total entre coque et plan ; dans la seconde la coque se renverse en créant un creux. Nous discutons les énergies de chaque configuration pour expliquer la transition observée.

Deformation of elastic shells

Abstract. *We discuss the contact of a thin elastic shell with a rigid plane. Experiments show a first order/discontinuous transition between two different configurations: the first is characterized by a flat contact between the shell and the rigid plane; in the second one the shell inverts itself and makes contact with the plane along a circular ridge only. We discuss the energies of both configurations in order to explain the observed transition.*

Dans la section 15 de la théorie de l'élasticité de L. D. Landau et E. M. Lifshitz (Landau, 1967), on trouve la solution du problème de déformation d'une coque sphérique soumise à une force ponctuelle normale à la surface. Dans le cas où les forces ont une faible intensité, la déformation ϵ qui est localisée au voisinage du point d'appui augmente linéairement avec la force. Si la force appliquée est plus importante, des plis circulaires, centrés sur le point d'application de la force, apparaissent. Pour cette dernière situation, les lois d'échelle pour la déformation de la coque, se déduisent de considérations d'ordre de grandeur des différents termes des équations de l'élasticité appliquées à notre problème. On montre ainsi que la force appliquée est proportionnelle à la racine carrée de la déformation ϵ , résultat dû à A. V. Pogorelov (1988). Plus précisément, si F est la force appliquée, alors :

$$F \sim \frac{Eh^2}{R} \epsilon \quad \text{pour } \epsilon < h \quad (1)$$

$$F \sim \frac{Eh^{5/2}}{R} \epsilon^{1/2} \quad \text{pour } \epsilon > h \quad (2)$$

Note présentée par Yves POMEAU.

où E est le module d'Young, R le rayon de la coque considérée comme sphérique au repos, et h son épaisseur.

Le passage d'un comportement à l'autre, pour $\epsilon \approx h$, est tout à fait continu, comme le mettent en évidence les expériences de Pogorelov. Celui-ci utilise des demi-coques sphériques en cuivre, matériau très élastique, de rayon $R = 150$ mm et d'épaisseur variant de 0,03 à 0,1 mm. La variation de h/R entre 1/5 000 et 1/1 500 permet d'appliquer des déformations beaucoup plus grandes que l'épaisseur h , condition nécessaire à la validité de la formule (2), tout en restant dans les limites de l'élasticité hookéenne, c'est-à-dire avec de faibles gradients du déplacement. L'expérience consiste à exercer une force sur le pôle de la coque à l'aide d'une pointe de courbure très supérieure à celle de la coque. L'accord entre théorie et expérience est bon.

A l'aide d'une expérience très simple, nous considérons ici la situation suivante, opposée à celle de Pogorelov : la courbure de la pointe de contact est cette fois très petite devant celle de la coque. Cela est plutôt l'analogue du contact de Hertz pour des coques. Nous avons utilisée deux types de balle se distinguant par le matériau et le rapport h/R . Ces balles sont les suivantes (les modules de Young mesurés par la flexion à trois points) :

- une balle de tennis, caractérisée par $E \approx 10^7$ N/m², $R = 35$ mm et $h = 3,7$ mm, conduisant à $h/R \approx 1/10$.
- une balle de ping-pong : $E \approx 10^8$ N/m², $R = 18,9$ mm, $h = 0,4$ mm et $h/R \approx 1/50$.

La procédure expérimentale consiste à insérer une demi-coque sphérique entre deux plaques rigides transparentes (ce qui rend possible l'observation de la coque déformée). Nous contrôlons le déplacement de la plaque supérieure tout en mesurant la force appliquée à l'aide d'un dynamomètre¹, (fig. 1). Lors d'une compression de la demi-coque, l'air peut s'échapper librement, afin de s'affranchir d'une pression qui modifierait les valeurs des forces mesurées.

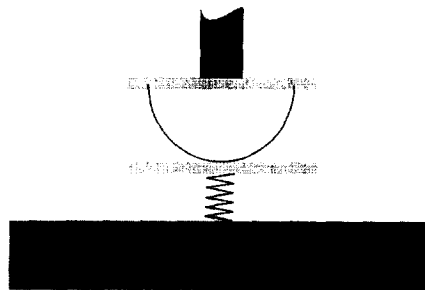


Fig. 1. – Montage expérimental. Le dynamomètre est représenté par un ressort. Le périmètre de la demi-sphère est fixé, pour éliminer d'éventuelles déformations non axisymétriques.

Fig. 1. – Experimental setup. The dynamometer is shown as a spring. The boundary of the half-sphere is fixed to the upper surface, to eliminate possible non axisymmetric deformations.

¹Pour avoir le déplacement effectif il est nécessaire de corriger la raideur finie du dynamomètre, qui est d'environ 30 kg pour 1 mm.

Déformation des coques élastiques

L'expérience met en évidence deux phases distinctes, au fur et à mesure que la déformation augmente (fig. 2) :

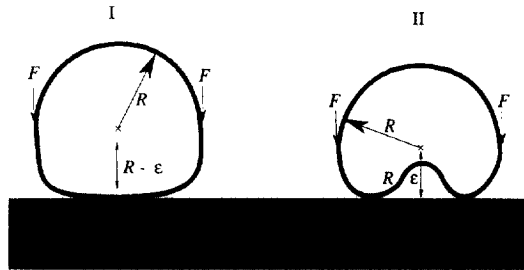


Fig. 2. – Deux configurations correspondant au contact des coques ; l'aplatissement d'une partie de la coque (à gauche) et le renversement de la courbure (à droite) donnent lieu à un pli circulaire et à un creux.

Fig. 2. – Two configurations corresponding to the contact of shells ; the flattening of part of the shell (left) and the inversion of the curvature (right) leading to a circular fold and to a trough.

– pour les faibles déformations, une partie de la coque est en contact avec la plaque rigide (schéma I, fig. 2) ;

– pour les déformations plus importantes, la partie aplatie se renverse comme le montre le schéma II de la figure 2. Ce renversement de courbure s'accompagne de la formation d'un pli circulaire où pratiquement toute l'énergie élastique est concentrée.

Dans la suite, nous appellerons configurations (I) et (II) les déformations respectivement plate et creuse. La figure 3 montre le changement quantitatif de la valeur de la force en fonction de la déformation. La transition a lieu pour une déformation de l'ordre de $2h$, pour les deux types de balle

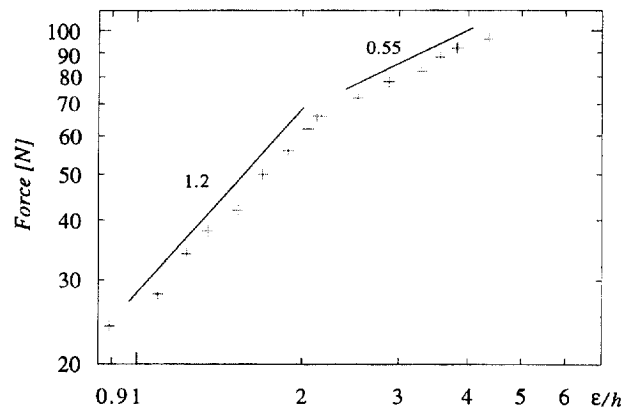


Fig. 3. – Force mesurée à l'aide d'un dynamomètre (en N) en fonction de la déformation normalisée à l'épaisseur (ϵ/h). On note une transition brusque pour $\epsilon/h = 2$.

Fig. 3. – The force measured by a dynamometer (in N) as a function of the normalized deformation (ϵ/h). Note the sharp transition at $\epsilon/h = 2$.

étudiés. Une interpolation donne (pour les balles de tennis) $F \sim \epsilon^{1,2}$, pour $\epsilon < 2h$ et $F \sim \epsilon^{0,55}$ pour $\epsilon > 2h$; ce qui met en évidence deux comportements différents. Comme ces deux configurations possèdent des lois de forces différentes, leurs énergies de déformation $\left(\int F d\epsilon\right)$ sont aussi différentes. L'égalisation de ces énergies, pour une déformation donnée², implique une transition discontinue, ce que nous observons dans nos expériences.

Lorsqu'on réalise un cycle d'application de la force, on observe une boucle d'hystérésis dans la réponse force-déplacement (fig. 4), mais avec une grande dissipation pendant la phase de retour en (II). Cette énergie dissipée s'évalue comme l'aire entre les courbes d'aller et retour. Les arguments qui suivent tentent d'expliquer l'origine de cette dissipation.

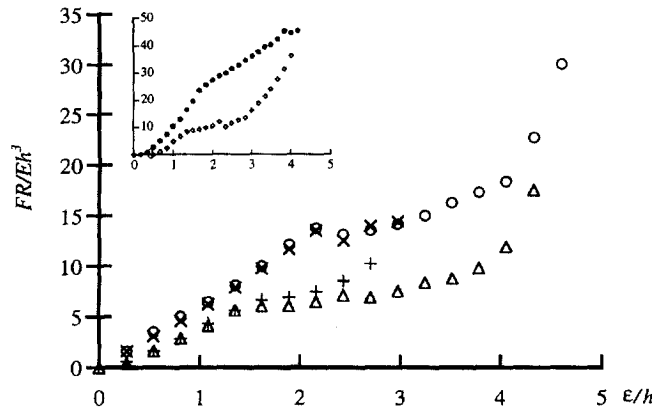


Fig. 4. – Force adimensionnée $F/Eh^2 \times R/h$ en fonction de la déformation (ϵ/h). Pour les balles de tennis : un cycle grand (aller : \circ ; retour : \triangle) et un court (aller : \times ; retour : $+$). Dans l'encadré pour celles de ping-pong (aller : \bullet ; retour : \diamond) on note une transition brusque pour $\epsilon/h \approx 2$.

Fig. 4. – Dimensionless force $F/Eh^2 \times R/h$ as a function of the deformation (ϵ/h). For the tennis balls : a long loop (forward : \circ ; backward : \triangle) and a short one (forward : \times ; backward : $+$). The inset show ping-pong ones (forward : \bullet ; backward : \diamond) one notes the sharp transition for $\epsilon/h \approx 2$.

Si $\epsilon < 2h$ l'aire représentant l'énergie dissipée est très petite en comparaison de celle de la boucle de la figure 4. On note que cette dissipation est bien plus importante lorsque l'on est en présence de la phase creuse (II). Une différence entre les phases (I) et (II) est l'existence d'un pli dans (II). Il pourrait donc y avoir une dissipation due aux fortes contraintes dans le solide. Cependant, une expérience de type Pogorelov montre que le solide reste largement élastique dans les conditions où l'on observait hystérésis : en réalisant un cycle sur une coque soumise à une force ponctuelle, où des plis se forment, l'aire mesurant la dissipation est négligeable.

En conclusion, l'énergie dissipée est sans doute due à la friction avec le plateau : dans la configuration (I), la surface de contact s'agrandit sans glisser sur le support plan, alors que dans la phase creuse (II), un déplacement de la couronne de contact crée une friction solide avec le plateau. Lorsqu'il existe

²Ce que nous pouvons retenir comme critère de transition, en fait la transition s'effectue plutôt pour l'égalité des forces, mais du point de vue des ordres de grandeur l'égalité de forces ou des énergies restent les mêmes, voir plus loin.

une compression de la coque ϵ la couronne se déplace de $\sqrt{R\epsilon}$ (voir plus loin) au fur et à mesure qu'on augmente ϵ . En général, les lois des frictions entre corps ne dépendent pas de la valeur de la surface de contact, mais de la force normale relative, le coefficient de proportionnalité est plus petit que l'unité, et on observe qu'il diminue avec la présence d'un lubrifiant. En conséquence, l'énergie dissipée est de la forme suivante (on utilise $F_{II} \sim \epsilon^{1/2}$; figure 3) :

$$W = \mu \int_{\epsilon_i}^{\epsilon_f} F_{II} d(\sqrt{R\epsilon}) \sim \mu\sqrt{R}(\epsilon_f - \epsilon_i)$$

l'aire de hystérésis croît linéairement avec le déplacement relatif.

Pour estimer les énergies élastiques des configurations (I) et (II), on imagine deux déformations idéales comme celles représentées sur la figure 5i. Dans la configuration (I), le contact entre la coque sphérique et le plan³, symbolisé par la droite AB , est décrit par la droite PQ . D'autre part, la fraction de coque inversée par symétrie par rapport au segment PQ , caractérise la configuration (II). L'énergie élastique de la configuration (I) possède deux contributions. La première est due à la compression de la calotte sphérique (en gris) limitée aux droites PA'' , $B''Q$ et PQ par le plan de trace AB ; cette énergie est due en fait à un changement de longueur dans la coque. La seconde contribution à l'énergie de la configuration (I) est plus subtile : elle est la conséquence du pli (circulaire) qui se forme à l'intersection des tangentes $A'P$ et PQ . En ce qui concerne l'énergie de la configuration (II), il n'existe qu'une contribution liée au pli formé par l'intersection des droites $A'P$ et la tangente par réflexion à la coque inversée (ne pas confondre avec PO !). Il faut ajouter qu'une partie de l'énergie de flexion intervient dans le changement de courbure concave-convexe et vice-versa.

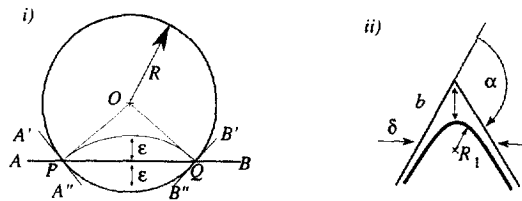


Fig. 5. – i) Configuration idéale. Les droites $A'A''$ et $B'B''$ sont tangentes au cercle, et les angles OPA' et OQB' sont droits. La distance PQ est $\sqrt{2R\epsilon}$ au premier ordre en ϵ . (Les rayons OP et OQ ne sont pas tangents au cercle inversé). ii) Asymptotes limitant un pli caractérisé par son rayon de courbure minimal R_1 ; α est l'angle entre les deux asymptotes. La largeur δ délimite l'enveloppe courbée correspondant au pli.

Fig. 5. – i) Idealized configuration. The straight lines $A'A''$ and $B'B''$ are tangent to the circle, and OPA' and OQB' are right angles. The distance PQ is $\sqrt{2R\epsilon}$ at first order in ϵ . (The radii OP and OQ are not tangents to the inverted circle). ii) Asymptotes limiting a fold characterized by its minimal radius R_1 ; α is the angle between the asymptotes and b the distance separating the extremity of the fold and the asymptotes intersection. The width delimits the curvature corresponding to the fold.

³Pour l'équilibre, nous négligeons la réaction de friction, discutée plus haut, sur la coque.

Notant 2γ l'angle POQ (fig. 5i), la différence de longueur entre la partie circulaire, limitée aux points P et Q , et la droite PQ est $u = 2R(\gamma - \sin \gamma) \approx R\gamma^3/3$. Tenant compte de la relation $2R \sin \gamma = \sqrt{2R\epsilon}$ qui conduit à $\gamma \approx \sin \gamma = \sqrt{\epsilon/2R}$, il vient $u \approx \frac{R}{3} (\epsilon/2R)^{3/2}$. Cela est réalisé pour PQ de l'ordre de $\sqrt{2R\epsilon}$, ce qui correspond au cas traité. L'énergie s'écrit alors $U \approx E \int dV (u/\sqrt{2R\epsilon})^2$. L'élément de volume intervenant dans cette intégrale est le produit de l'épaisseur par la surface soumise à la déformation $\pi R\epsilon$. Une première contribution à l'énergie caractérisant la configuration (I) est :

$$U \sim Ehu^2 \sim \frac{Eh}{R} \epsilon^3$$

La contribution à l'énergie apportée par les plis se calcule comme suit. L'énergie dépend uniquement de l'angle α entre les asymptotes limitant le pli (fig. 5ii). Dans la configuration (I), cet angle correspond à $B'QB$, représenté sur la figure 5i, et il est égal à la moitié de l'angle $POQ = \gamma \approx \sqrt{\epsilon/2R}$. Dans la configuration (II), l'angle α correspond cette fois à γ (les deux demi-cercles étant symétriques).

Calculons l'énergie du pli représenté sur la figure 5ii. On utilise pour cela la théorie des plaques minces. Cette théorie, (Föppl, 1907) donne les équations d'équilibre d'une plaque plane mince. Nous pouvons considérer ainsi que ces équations donnent des ordres de grandeur corrects en ce qui concerne les énergies des déformations tant que leur courbure gaussienne est bien supérieure à la courbure de la coque à l'équilibre, ce qui est le cas ici.

Il est possible d'exprimer (Ben Amar, 1997) les équations des plaques minces comme les conditions d'Euler-Lagrange rendant stationnaire (ds est l'élément d'aire de la plaque) l'expression :

$$U = Eh \int \left[\frac{h^2}{24(1-\sigma^2)} H^2 + \frac{1}{8} (\Delta^{-1} K)^2 \right] ds \quad (3)$$

par rapport au changement de forme qui affecte *a priori* H et K . Ici $H = 1/R_1 + 1/R_2$ est la courbure moyenne et $K = (1/R_1 R_2)$ la courbure gaussienne (R_1 et R_2 rayons de courbure principaux maximal et minimal).

Dans la limite d'une plaque d'épaisseur nulle ($h = 0$), le pli se raccorde en deux parties continues (mais non différentiables), formant un angle α . Lorsque h est fini, la structure d'équilibre engendre une enveloppe courbée ($K \neq 0$) dans une région de largeur δ , qui correspond à la largeur du pli (fig. 5ii). Soit R_1 le rayon de courbure minimal du pli et b la distance qui sépare l'extrémité du pli à l'intersection des asymptotes. Lorsque $h \rightarrow 0$ à R constant, alors δ, b et $R_1 \rightarrow 0$.

La géométrie montre que :

$$R_1 \sim b/\tan^2(\alpha/2) \quad \text{et} \quad \delta \sim b/\tan(\alpha/2)$$

d'où

$$R_1 \sim \delta/\tan(\alpha/2)$$

Le rayon de courbure maximal, R_2 , est de l'ordre du rayon de la sphère, R . Cela est déduit de la remarque suivante : lorsque h est nul, la courbure $1/R_2$ vaut $1/R$ dans la région sphérique non déformée et $-1/R$ dans la coque inversée. Lorsque l'épaisseur h est faible, $1/R_2$ est une fonction qui

varie continûment de $-1/R$ à $+1/R$ dans la région de largeur δ . Puisque l'énergie (3) ne prend en compte que les carrés des courbures, on peut remplacer $1/R_2^2$ par sa valeur moyenne d'ordre de grandeur $1/R^2$.

L'énergie du pli a deux contributions : l'une due à la courbure gaussienne $K = 1/RR_1$ et l'autre due à la courbure moyenne $H \approx 1/R_1$. L'aire du pli est $\delta 2\pi\sqrt{2R\epsilon}$. Ainsi, en remplaçant Δ^{-1} par l'échelle de variation des déformations δ^2 , il vient :

$$U[\delta] \sim Eh 2\pi\sqrt{2R\epsilon} \delta \left(\frac{h^2}{R_1^2} + \frac{\delta^4}{R_1^2 R^2} \right)$$

La minimisation de l'énergie U par rapport à δ donne :

$$\delta \sim \sqrt{hR}$$

ce qui entraîne $R_1 \approx \sqrt{hR}/\tan(\alpha/2)$.

L'énergie vaut alors :

$$U \approx Eh^2 \sqrt{h\epsilon} \tan^2(\alpha/2)$$

Pour les valeurs de l'angle α correspondant aux configurations (I) et (II), nous pouvons établir l'expression finale des énergies des plis. Dans la configuration (I), $\alpha \sim \sqrt{\epsilon/R}$, et dans la configuration (II), α vaut le double. Il reste à comparer la courbure gaussienne, $1/RR_1$ à celle de la sphère non déformée $1/R^2$. Alors, si $\epsilon > h$, $R_1 < R$ car $R_1 = R\sqrt{h/\epsilon}$.

Finalement, les énergies totales de chaque configuration sont :

$$U_I = \frac{C_0}{4} \frac{Eh^{5/2}}{R} \epsilon^{1/2} + C_1 \frac{Eh}{R} \epsilon^3 \quad (4)$$

$$U_{II} = C_0 \frac{Eh^{5/2}}{R} \epsilon^{1/2} \quad (5)$$

Si $0 < \epsilon < h(3C_0/4C_1)^{2/3}$, $U_I < U_{II}$, ce qui signifie que pour les faibles compressions, la configuration la plus favorable est (I). Si $\epsilon > h(3C_0/4C_1)^{2/3}$, $U_I > U_{II}$ alors le changement de courbure est énergétiquement plus favorable.

Les forces correspondant à chaque configuration sont :

$$F_I = \frac{3C_0}{8} \frac{Eh^{5/2}}{R} \epsilon^{1/2} + 3C_1 \frac{Eh}{R} \epsilon^2 \quad (6)$$

$$F_{II} = \frac{3C_0}{2} \frac{Eh^{5/2}}{R} \epsilon^{1/2} \quad (7)$$

Ces forces se croisent pour une déformation $\epsilon = h(3C_0/8C_1)^{2/3}$ plus petite que $h(3C_0/4C_1)^{2/3}$, mais du même ordre de grandeur.

La loi de force F_H est bien vérifiée dans les expériences comme le montre la *figure 3*. L'accord entre la théorie et l'expérience pour la valeur de F_I est toujours possible. En guise d'exemple, la formule (6) peut, pour C_0 et C_1 du même ordre, bien se relier avec une loi en puissance ϵ^ν , avec $\nu \approx 1,2$.

Finissons cette Note en considérant le contact dynamique (soit le rebond) inspiré du travail de H. Hertz. Cette situation apparaît lorsque on lance, par exemple, une balle de ping-pong avec une vitesse v sur un plan rigide. L'énergie totale initiale $1/2 mv^2$ réalise une compression pendant un temps τ jusqu'à une déformation maximale (quand l'énergie cinétique initiale se transforme en énergie potentielle U_H de (5), car on suppose $\epsilon_{\max} > 2h$. Il découle de ces considérations (c étant de l'ordre des vitesses des ondes élastiques dans le matériau : $c^2 \approx E/\rho$, ρ densité massique) :

$$\epsilon_{\max} \sim \left(\frac{v}{c}\right)^{4/3} \frac{R^2}{h}$$

et le temps de contact

$$\tau \sim \left(\frac{v}{c}\right)^{1/3} \frac{R}{h} \frac{R}{c}$$

Les formules pour les forces décrites sont valables si $\epsilon_{\max} > 2h$, i.e., si $v/c > (h/R)^{3/2}$. Pour les balles de ping-pong cela donne $v/c > 1/325$, où $v > 1 \text{ m/s}^1$ ($c \approx 320 \text{ m/s}^1$). Dans cette situation le temps de contact résultant est suffisamment long devant le temps R/c mis par une onde élastique à parcourir la sphère, car $\tau > \sqrt{R/h} R/c$. Cette inégalité est nécessaire pour utiliser l'approximation statique de la force de réaction, comme dans le cas du contact de Hertz. Pour des vitesses plus petites, la loi de force change, ainsi que la valeur de ϵ_{\max} : le temps de contact diverge alors lorsque v tend vers zéro.

Remerciements. Nous remercions l'aide et les conseils judicieux de M. Adda-Bedia, B. Audoly, G. Bacri, L. Brouard, J. Kerboriou, J. Meunier, et J. C. Sutra-Fourcade.

Note remise le 5 février 1997, acceptée le 10 février 1997.

Références bibliographiques

- Ben Amar M., Pomeau Y., 1997. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A 453, 1.
Föppl A., 1907. *Vorlesungen über technische Mechanik*, Bd. 5, Leipzig, p. 132.
Landau L. D. et Lifshitz E. M., 1967. *Théorie de l'élasticité*, Éditions Mir, Moscou, p. 83-88.
Pogorelov A. V., 1988. *Bendings of Surfaces and Stability of Shells*, Am. Math. Soc.