

## Examen d'instabilités et turbulence

lundi 1 avril 2019, durée 3h

### I-Instabilité de Rayleigh-Taylor

On considère 2 fluides de masse volumique  $\rho_1$  et  $\rho_2$  au repos dans un récipient parallélépipédique, le fluide 2 étant au-dessus du fluide 1. On notera  $\gamma$  la tension de surface entre les 2 fluides. On considérera le récipient suffisamment grand pour négliger les effets des parois. Enfin on traite le problème dans l'approximation des écoulements parfaits.

On souhaite étudier la stabilité de la configuration de repos dans laquelle la vitesse dans chacun des fluides est nulle et la hauteur de l'interface est  $\xi(x, t) = 0$  (interface plane).

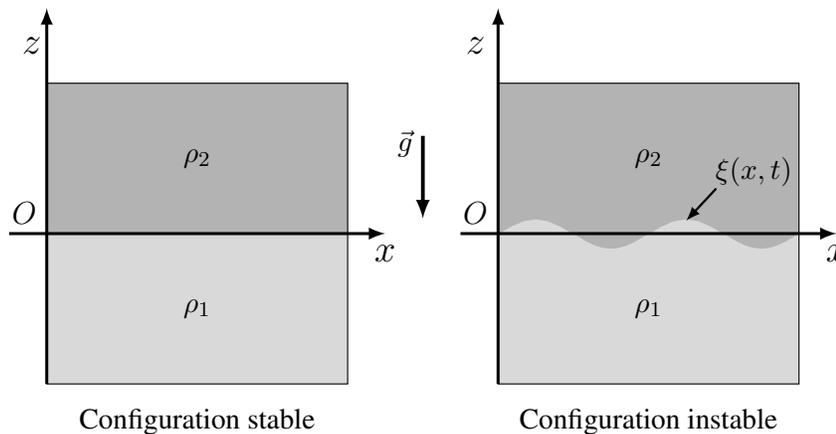


FIGURE 1 – Schéma des couches de fluide superposées

1. Donner l'expression des pressions  $P_{0,1}(x, y, z)$  et  $P_{0,2}(x, y, z)$  dans les fluides 1 et 2, respectivement dans la configuration de repos.

On ne s'intéressera, dans la suite qu'à des perturbations à 2 dimensions irrotationnelles, de telle sorte que les vitesses dérivent d'un potentiel  $\phi_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ).

2. Montrer que l'équation d'Euler s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \phi_i)^2 = -\frac{1}{\rho_i} p_i \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

3. Justifier en une phrase qu'il est pertinent de ne considérer qu'une perturbation 2D.

4. On écrit les perturbations sous la forme  $a(x, z, t) = \hat{a}(z)e^{ikx+st} + cc$ , avec  $a, \hat{a}, k$  et  $s$  réels soit :

$$\begin{cases} \phi_i = \hat{\phi}_i(z)e^{ikx+st} + cc \\ p_i = \hat{p}_i(z)e^{ikx+st} + cc \\ \xi_i = \hat{\xi}_i(z)e^{ikx+st} + cc \end{cases}$$

Que représentent  $\hat{a}, k$  et  $s$  ? Justifier que l'on peut choisir  $k > 0$ .

5. De l'équation d'Euler et des conditions aux limites montrer que, dans l'approximation des petites perturbations :

$$\hat{\phi}_1 = Ae^{kz} \quad (2)$$

$$\hat{\phi}_2 = Be^{-kz} \quad (3)$$

$$s\phi_i = -\frac{1}{\rho_i}p_i \quad (4)$$

6. Montrer que dans l'approximation des petites déformations, les conditions de raccordement à l'interface entre les 2 fluides s'écrivent :

$$\hat{p}_2 - \rho_2 g \hat{\xi} - (\hat{p}_1 - \rho_1 g \hat{\xi}) = -\gamma k^2 \hat{\xi} \quad (5)$$

$$Ak \simeq s \hat{\xi} \quad (6)$$

$$-Bk \simeq s \hat{\xi} \quad (7)$$

7. Dédurre de ce qui précède la relation de dispersion de l'instabilité de Rayleigh-Taylor :

$$s^2 = \frac{k}{\rho_2 + \rho_1} ((\rho_2 - \rho_1)g - \gamma k^2) \quad (8)$$

8. Discuter la stabilité de l'interface en fonction de  $\rho_1$  et  $\rho_2$

9. Dans le cas où  $\rho_1 > \rho_2$ , montrer que l'interface peut supporter des ondes progressives.

## II. Le jet plan turbulent

On considère un jet plan d'air se développant dans de l'air au repos (fig. 2). On note  $(u, v)$  les composantes de la vitesse selon  $(x, y)$ , avec  $x$  la direction longitudinale (l'origine  $x = 0$  étant prise à la sortie de l'orifice du jet) et  $y$  la direction transverse. La largeur  $d$  de l'embouchure étant très petite devant la profondeur  $\Delta z$  (normal au plan de la figure), on peut considérer, pour des distances  $x < \Delta z$  en aval, l'écoulement comme étant statistiquement bidimensionnel : la vitesse moyenne  $\bar{u}(x, y, z)$  est indépendante de  $z$ .

On rappelle l'équation de Reynolds (avec  $\bar{u}_i$  la vitesse moyenne et  $u'_i$  la fluctuation) :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \bar{u}_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i - \overline{u'_i u'_j} \right).$$

On note  $L$  l'échelle de longueur caractéristique selon  $x$  et  $\delta$  celle selon  $y$ , avec  $\delta \ll L$ . On note  $U$  l'ordre de grandeur de la vitesse moyenne axiale  $\bar{u}$  et  $V$  celle de la vitesse latérale  $\bar{v}$ . Enfin, on note  $u^*$  l'ordre de grandeur des fluctuations turbulentes, que nous supposons isotropes (c'est-à-dire telles que  $\overline{u'^2} \simeq \overline{v'^2} \simeq \overline{u'v'} \simeq u^{*2}$ ).

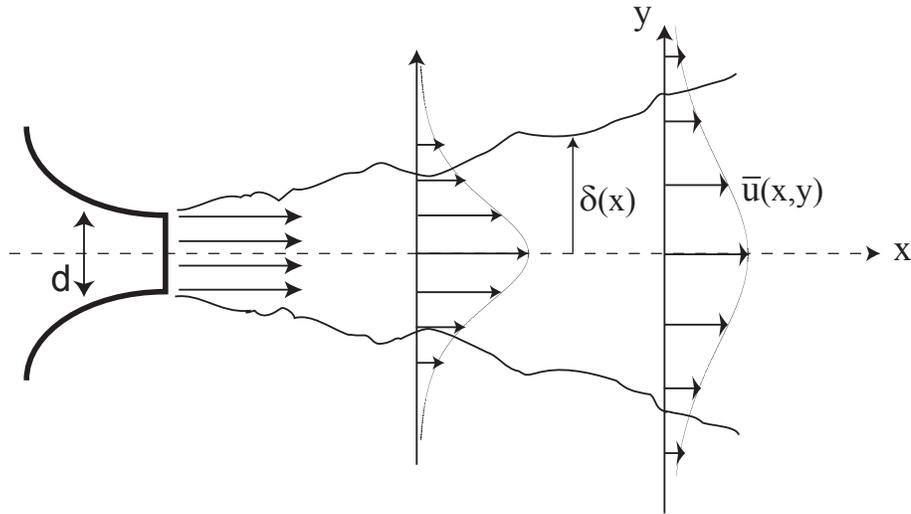


FIGURE 2 – Développement d'un jet plan turbulent et profils de vitesse dans la partie autosimilaire.

1. Exprimer l'ordre de grandeur de la vitesse latérale  $V$  en fonction de  $U$ ,  $L$  et  $\delta$ . Écrire les équations de Reynolds en régime statistiquement stationnaire pour les composantes  $u$  et  $v$ , et évaluer les ordres de grandeur des différents termes (sauf celui de la pression). Montrer que les termes visqueux sont négligeables devant les termes inertiels **et** les termes de transport turbulent si

$$\text{Re}_\delta \gg (L/\delta) \quad \text{et} \quad \text{Re}_\delta \gg (U/u^*)^2,$$

où l'on a posé  $\text{Re}_\delta = U\delta/\nu$ . Montrer de plus que, si la condition  $\delta/L \ll u^*/U$  est vérifiée, les équations de Reynolds se réduisent à

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \quad (9)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y}. \quad (10)$$

2. Exprimer, à partir de l'équation de Reynolds selon  $y$ , la pression moyenne  $\bar{p}$  en fonction de la pression à l'infini  $p_0 = \text{cste}$  et des fluctuations de vitesse. Montrer (toujours avec l'hypothèse  $\delta/L \ll 1$ ) que l'équation de Reynolds selon  $x$  se réduit à :

$$\frac{\partial(\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} = -\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}. \quad (11)$$

3. On s'intéresse à la région autosimilaire du jet : A suffisamment grande distance en aval, le jet s'élargit et sa vitesse moyenne diminue, mais le profil de vitesse garde la même forme. On définit la vitesse centrale moyenne par  $U_0(x) = \bar{u}(x, 0)$  et la largeur  $\delta(x)$  telle que

$$\bar{u}(x, \delta(x)) = \frac{1}{2}U_0(x).$$

L'autosimilarité permet d'écrire le profil moyen sous la forme adimensionnée :

$$\bar{u}(x, y) = U_0(x)f(\xi), \quad (12)$$

$$\overline{u'v'} = U_0(x)^2g(\xi). \quad (13)$$

où l'on a posé la coordonnée réduite  $\xi = y/\delta(x)$ .

- (a) Compte tenu de la symétrie du problème, discuter la parité de la fonction  $f(\xi)$  et préciser ses conditions aux limites en  $\xi = 0$  et en  $\xi = \pm 1$ .
- (b) En intégrant l'équation (11) par rapport à  $y$  entre  $-\infty$  et  $+\infty$ , montrer que le flux de quantité de mouvement selon  $x$  (par unité de profondeur)

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \rho \bar{u}^2 dy$$

est indépendant de  $x$ .

- (c) En écrivant la vitesse axiale  $\bar{u}$  sous la forme autosimilaire (12), en déduire la relation suivante entre déclin de la vitesse axiale et élargissement du jet :

$$\frac{\delta}{U_0} \frac{dU_0}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{d\delta}{dx}. \quad (14)$$

- (d) A partir de l'équation de continuité pour les vitesses moyennes, montrer que la vitesse moyenne latérale peut elle aussi s'exprimer de façon autosimilaire :

$$\bar{v} = \frac{1}{2} \frac{d\delta}{dx} U_0(x) \left[ 2\xi f(\xi) - \int_0^\xi f(s) ds \right]. \quad (15)$$

Vous serez amené à devoir faire une intégration par parties pour trouver ce résultat.

4. En substituant les profils autosimilaires (12), (15) et (13) dans l'équation de Reynolds (11), et en utilisant la relation (14), montrer que

$$\frac{1}{4} \frac{d\delta}{dx} (F^2)'' = g', \quad \text{avec} \quad F(\xi) = \int_0^\xi f(s) ds, \quad (16)$$

où les primes désignent ici les dérivées par rapport à  $\xi$ .

5. Déduire de l'équation (16) que le jet croît linéairement, c'est-à-dire que son taux d'élargissement  $S = d\delta/dx$  est constant. En déduire la loi de variation de la vitesse moyenne axiale  $U_0(x)$  et du débit  $Q(x)$  en fonction de la distance  $x$  à l'orifice du jet (on négligera la présence d'une région non auto-similaire à  $x$  petit, c'est-à-dire que l'on supposera que la largeur du jet est  $\delta(x) = Sx$ ). Proposez un mécanisme permettant d'expliquer l'augmentation du débit  $Q$  avec  $x$ .
6. On écrit la contrainte de Reynolds  $\tau_{xy} = -\rho \overline{u'v'}$  dans le cadre du modèle de viscosité turbulente :

$$\tau_{xy} = \rho \nu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (17)$$

où  $\nu_T$  est le coefficient de viscosité turbulente (on a négligé ici la contribution  $\partial \bar{v}/\partial x$  de la déformation moyenne.) Ce coefficient dépend *a priori* de la position dans l'écoulement, mais l'hypothèse d'auto-similarité permet de supposer qu'il ne dépend que de  $x$ . Nous supposons en outre que le nombre de Reynolds turbulent, défini par

$$\text{Re}_T = \frac{U_0(x)\delta(x)}{\nu_T(x)},$$

est constant dans tout l'écoulement.

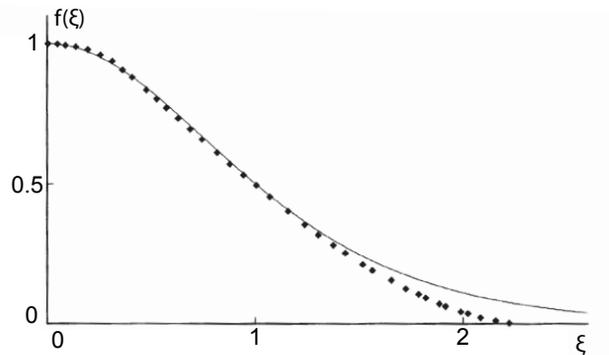


FIGURE 3 – Profil de vitesse axiale moyenne dans la région autosimilaire d'un jet plan. • : Données de Heskestad (1965); — : équation (19). D'après Pope, 2000.

- (a) Par un argument de particule déplacée, déterminer le signe du tenseur de Reynolds  $\tau_{xy} = -\rho \overline{u'v'}$  et schématiser l'allure de la fonction  $g(\xi)$ .
- (b) Montrer, à partir de l'équation (17) que l'autosimilarité de  $\overline{u'v'}$  (13) permet d'exprimer  $g(\xi)$  en fonction d'une dérivée de  $F(\xi)$  et de  $\text{Re}_T$ .
- (c) En déduire l'équation de Reynolds adimensionnée (16) sous la forme

$$F''' + \alpha^2(F^2)'' = 0, \tag{18}$$

où  $\alpha$  est une constante sans dimension que l'on exprimera en fonction de  $S$  et  $\text{Re}_T$ .

- (d) En tenant compte de la symétrie du profil de vitesse moyen, quelle est la parité de la fonction  $F(\xi)$  ?
- (e) En déduire que l'équation (18) peut s'intégrer sous la forme

$$F' = 1 - (\alpha F)^2,$$

qui admet pour solution  $F(\xi) = \tanh(\alpha\xi)/\alpha$ . En déduire la forme du profil de vitesse :

$$f(\xi) = \frac{1}{\text{ch}^2(\alpha\xi)} \tag{19}$$

On rappelle que  $\text{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ,  $\text{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$  et  $\tanh(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$ .

- 7. La figure 3 représente un profil expérimental de vitesse moyenne adimensionnée, comparé à l'expression (19). Dans quelle région du jet l'approximation d'une viscosité turbulente indépendante de  $y$  s'applique-t-elle ? En dehors de cette région, comment faudrait-il que varie cette viscosité turbulente pour reproduire les mesures expérimentales ?