Instabilité de Rayleigh-Plateau

I Description géométrique de l'aire interfaciale

1- $\mathcal{V}(C_0) = \pi R_0^2 \lambda = \boxed{\frac{2\pi^2}{k} R_0^2 = \mathcal{V}(C_0)}$

$$\mathcal{V}(C) = \int_0^{2\pi/k} \pi R^2(z)\, dz = \int_0^{2\pi/k} \pi R_p^2 \left[1+\varepsilon\cos(kz)\right]^2 dz$$

$$\mathcal{V}(C) = \frac{\pi R_p^2}{k}\int_0^{2\pi}\left(1+2\varepsilon\cos\xi+\varepsilon^2\cos^2\xi\right)d\xi = \frac{\pi R_p^2}{k}\left[\int_0^{2\pi}d\xi + \int_0^{2\pi}2\varepsilon\cos\xi\, d\xi + \int_0^{2\pi}\varepsilon^2\cos^2\xi\, d\xi\right]$$

$$= \frac{\pi R_p^2}{k}\left\{2\pi + \varepsilon^2\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin x\cos x\right]_0^{2\pi}\right\} = \frac{2\pi^2 R_p^2}{k}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\right)$$

$$\boxed{\mathcal{V}(C) = \frac{2\pi^2 R_p^2}{k}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\right)}$$

2- $\mathcal{V}(C) = \mathcal{V}(C_0) \Leftrightarrow \frac{2\pi^2}{k} R_p^2\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\right) = \frac{2\pi^2}{k} R_0^2$

$$\Leftrightarrow R_p = R_0 \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\varepsilon^2}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R_p \simeq R_0\left(1-\frac{\varepsilon^2}{4}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)}$$

3- $S(C) = \int_0^{2\pi/k} 2\pi R(z)\, d\ell = \int_0^{2\pi/k} 2\pi R_p\left(1+\varepsilon\cos kz\right)\left(1+\frac{1}{2}R_p^2\varepsilon^2k^2\sin^2 kz\right)dz$

$$= 2\pi R_p\int_0^{2\pi/k}\left(1+\varepsilon\cos kz+\frac{1}{2}R_0^2\varepsilon^2k^2\sin^2 kz\right)dz + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$= 2\pi R_p\left[\frac{2\pi}{k}+\frac{1}{2}R_0^2\varepsilon^2 k\pi\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$S(C) = \frac{4\pi^2}{k}R_0\left(1-\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}R_0^2\varepsilon^2k^2\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$\boxed{S(C) = \frac{4\pi^2}{k}R_0\left[1-\frac{\varepsilon^2}{4}\left(1-R_0^2k^2\right)\right]}$$

4 $S_0 = \frac{4\pi^2}{k} R_0 \overset{?}{>} S = \frac{4\pi^2}{k} R_0^2 \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{4}(1 - R_0^2 k^2) \right]$

ainsi l'instabilité diminue l'énergie de surface si

$1 - R_0^2 k^2 > 0$ soit $k = \frac{2\pi}{d} < \frac{1}{R_0} \iff \boxed{d > \frac{R_0}{2\pi}}$

c'est donc instable aux grandes longueur d'onde.

II Champs de vitesse et de pression

1. Eq d'Euler linéarisée

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru) + ikw = 0 \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} + \cancel{(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})} v_r = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \cancel{(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})} v_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru) + ikw = 0 \\ \sigma u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \\ \sigma w = -\frac{1}{\rho} ik p \end{cases}$$

2- $p(r)$

on a $u = -\frac{1}{\rho\sigma}\frac{\partial p}{\partial r}$ et $w = -\frac{1}{\rho\sigma} ikp$ on injecte dans la $\operatorname{div}\vec{v}$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(-\frac{1}{\cancel{\rho\sigma}}\frac{\partial p}{\partial r}\right)\right] + \frac{k^2}{\cancel{\rho\sigma}} p = 0 \iff -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + k^2 p = 0$$

$$\iff \boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = k^2 p}$$

3- "A" représente l'amplitude de la perturbation de pression.

4- $\sigma u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$ on pose $\xi = kr \Rightarrow dr = \frac{1}{k} d\xi$

d'où $\frac{\partial p}{\partial r} = k\frac{\partial p}{\partial \xi} = Ak I_0' = Ak I_1 \Rightarrow \boxed{u = -\frac{kA}{\sigma\rho} I_1(kr)}$

$\sigma w = -\frac{ik}{\rho} p \Rightarrow \boxed{w = -I_0 \frac{Aik}{\sigma\rho}}$

II - Conditions aux limites

$$R(z,t) - R_0 = \xi(t)\, \mathcal{R}e\left[e^{ikz}\right]$$

$$R(z,t) = R_0\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)\left[1 + \varepsilon\, \mathcal{R}e\left(e^{ikz}\right)\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$= R_0\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{4} + \varepsilon\, \mathcal{R}e\left(e^{ikz}\right)\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$\Rightarrow R(z,t) - R_0 = R_0 \varepsilon\, \mathcal{R}e\left(e^{ikz}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \xi(t)\, \mathcal{R}e\left(e^{ikz}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\xi(t) = R_0 \varepsilon}$$

2- $u = \dfrac{\partial R(t)}{\partial t} + \cancel{w \dfrac{\partial R}{\partial z}}$ linéarisé.

$$\Rightarrow u = \sigma \xi = -I_1(kr)\frac{Ak}{\rho\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\xi = -I_1(kr)\frac{Ak}{\rho\sigma^2}}$$

3- Sans perturbation

$$P_0 - P_\infty = \frac{\gamma}{R_0}$$

4- $$\frac{P_{int} - P_\infty}{\gamma} = \frac{1}{R_0}\left[1 - \varepsilon\left(1 - R_0^2 k^2\right)\cos kz\right]$$

$$= \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_0}\varepsilon\left(1 - R_0^2 k^2\right)\cos kz$$

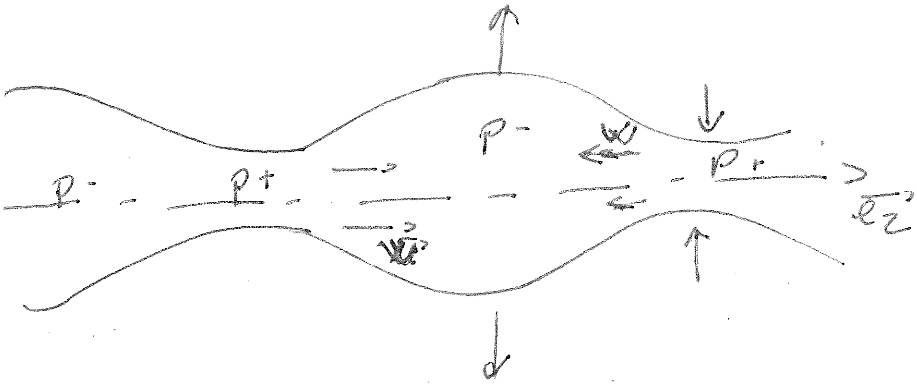
or $\dfrac{1}{R_0} = \dfrac{P_0 - P_\infty}{\gamma} \Rightarrow \dfrac{P_{int} - P_\infty}{\gamma} = \dfrac{P_0 - P_\infty}{\gamma} - \dfrac{1}{R_0}\varepsilon\left(1 - R_0^2 k^2\right)\cos kz$

$$\Leftrightarrow \frac{P_{int} - P_0}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} p(R_p)\, \mathcal{R}e\left(e^{ikz}\right) = -\frac{\varepsilon}{R_0}\left(1 - R_0^2 k^2\right) \mathcal{R}e\left(e^{ikz}\right)$$

$$\Rightarrow p(R_p) = -\frac{\varepsilon\gamma}{R_0}\left(1 - R_0^2 k^2\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{or } \xi = \varepsilon R_0 \Rightarrow \varepsilon = \dfrac{\xi}{R_0} \\ \text{et } \xi = -I_1 \dfrac{Ak}{\rho\sigma^2} \end{array}\right\} \Rightarrow p(R_p) = -\frac{I_1 A k \gamma}{R_0^2 \rho \sigma^2}\left(1 - R_0^2 k^2\right)$$

6 -



la perturbation est amplifiée.

IV Taux de croissance

1 -

III.5 $\rightarrow$ $p(r) = \frac{\gamma}{R_0^2} \frac{A I_1(kr)}{\rho \sigma^2} (1 - R_0^2 k^2)$

II.2 $\rightarrow$ $p(r) = A k I_0(kr)$

$\Rightarrow \boxed{\sigma^2 = \frac{\gamma}{\rho R_0^2} \frac{I_1(kr)}{I_0(kr)} (1 - R_0^2 k^2)}$

2 - I_1 et I_0 sont > 0 donc $\sigma^2 > 0$ ssi $\underbrace{(1 - R_0^2 k^2)}_{\text{idem I.4.}} > 0$

Des courbes on a :

$a k \to 0$ $I_1 \sim ak$; $a \in \mathbb{R}$

$I_0 \sim 1 + \frac{a}{2} k^2$

$\Rightarrow \sigma^2 \simeq \frac{ak}{1} k \sim k^2$ $\boxed{\sigma \sim k}$

* k grand $\sigma^2 < 0$ $\Rightarrow \sigma = i\omega \Rightarrow$ ondes propagatives

II Production d'énergie cinétique

1) Laminaire $\delta(x) \propto \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$

Turbulent : $\delta(x) \propto \frac{u'}{U} x$.

2) SCI : transport de quantité de mvt par les fluctuations turbulentes

SCV ; transport diffusif de quantité de mouvement.

3) vitesse de friction $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$

épaisseur de sous-couche visqueuse : $\delta_v = \frac{\nu}{u_\tau}$

δ_v est l'épaisseur y sur laquelle la contrainte, dominée par la contribution visqueuse $\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial \bar{u_x}}{\partial y}$ $(\forall y < \delta_v)$ devient dominée par la contribution turbulente $\tau_{xy} = -\rho \overline{u'_x u'_y}$ $(\forall y > \delta_v)$.

u_τ est de l'ordre de grandeur des fluctuations turbulentes près de la paroi, ainsi que l'ordre de grandeur de $\bar{u}_x$ en $y = \delta_v$.

4) $\frac{\delta}{\delta_v} = \frac{\delta u_\tau}{\nu} = Re_\tau \gg 1$ où Re_τ est le nbre de Reynolds construit sur u_τ et δ.

5) Décomposition de Reynolds : $u_i = \overline{u_i} + u'_i$

$$k_{tot} = \frac{1}{2}\overline{u_i u_i} = \frac{1}{2}\overline{(\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_i + u'_i)}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\overline{\bar{u}_i \bar{u}_i}}_{k_{moy}} + \frac{1}{2}\underbrace{\overline{\bar{u}_i u'_i}}_{0} + \frac{1}{2}\underbrace{\overline{u'_i \bar{u}_i}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{2}\overline{u'_i u'_i}}_{k_{turb}}$$

$$= k_{moy} + k_{turb}.$$

6) $k_{turb} = \frac{1}{2}\overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2}\left(\overline{u'^2_x} + \overline{u'^2_y} + \overline{u'^2_z}\right) = -\frac{\tau_{ii}}{2\rho}$ avec τ_{ii} trace de τ_{ij}

$$= \frac{u_\tau^2}{2}(4{,}4 + 0{,}5 + 2{,}2) = 3{,}55\, u_\tau^2$$

$$k_{moy} = \frac{1}{2} u_\tau^2 \left(\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{\delta_v}\right) + C\right)^2$$

On a $k_{moy} \simeq k_{turb}$ pour $y \simeq \delta_v \exp\left(\kappa\left(\sqrt{7{,}1} - C\right)\right)$.

avec $\kappa \simeq 0{,}4$ et $C \simeq 5$, on trouve $\boxed{y \simeq 0{,}4\,\delta_v}$

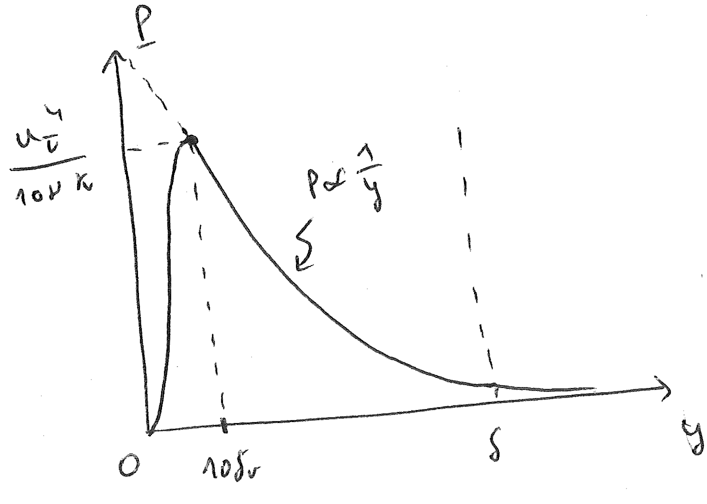
Dans la sous-couche inertielle, on a $k_{moy} \gg k_{turb}$.
$(y \gg 10\,\delta_v)$

7) $P = -\overline{u_i' u_j'} \dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$. Seul contribue ici $i = x$ et $j = y$ sur les 9 termes de la somme.

soit $P = -\overline{u_x' u_y'} \dfrac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}$ avec $\dfrac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} = \dfrac{u_\tau}{\kappa y}$ et $\overline{u_x' u_y'} = +u_\tau^2$

$$\boxed{P = \frac{u_\tau^3}{\kappa y}} \quad \forall \ 10\,\delta_v < y < \delta.$$

P diverge pour $y \to 0 \Rightarrow$ pas physique.
En pratique $\forall y < 10\,\delta_v$ il n'y a plus de turbulence donc $P \to 0$.
P est donc maximal à la transition entre SCI et SCV.
$P \to 0 \ \forall y \gg \delta$ car pas de turbulence à l'∞.
Le maximum de P est en $y \simeq 10\,\delta_v$: $P_{max} \simeq \dfrac{u_\tau^4}{10\,\nu\kappa}$.



8) Pour $i = x$, $j = y$; on a ici

$$\tau_{xy} = \rho \nu_T \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} = \rho \nu_T \frac{u_\tau}{\kappa y}$$

Or on a aussi $\tau_{xy} = \rho u_\tau^2$

d'où $\nu_T = \kappa y u_\tau$.

On identifie $\boxed{l_m(y) = \kappa y}$

$l_m(y)$ représente la taille des plus gros tourbillons responsables du transfert de qté de mvt. Il est donc logique de trouver $l_m \propto y$.