Examen d'instabilités et turbulence

lundi 9 avril 2018, durée 3h

1 Instabilité de Rayleigh-Plateau

On souhaite étudier la stabilité d'un cylindre de liquide comme peut en former la rosée sur une toile d'araignée (cf. figure 1) ou lors de l'écoulement d'un liquide à la sortie d'un tuyau vertical. Dans ces deux situations le cylindre finira par se briser et former des gouttes.

FIGURE 1 – Toile d'araignée après la rosée

Pour étudier l'instabilité à l'origine de la formation des gouttes, on se limitera à des perturbations axisymétriques de la surface du liquide et on considérera qu'en absence d'instabilité le liquide est au repos.
Le cylindre liquide a un rayon initiale R_0 et pour direction axiale (Oz). On y superpose une perturbation axisymétrique, périodique selon (Oz). On note γ la tension interfaciale liquide/air et on négligera les viscosités de l'air et du liquide, ainsi que l'effet de la gravité.

1.1 Description géométrique de l'aire interfaciale

1. Calculer le volume d'un cylindre C_0 de rayon R_0 et de longueur $\lambda = 2\pi/k$ et celui d'un pseudo-cylindre de ême longueur et de rayon $R(z) = R_p\left[1 + \epsilon \cos(kz)\right]$, où $\epsilon << 1$.
2. À quelle condition ces deux volumes sont-ils égaux ? En déduire que à l'ordre 2 en ϵ on a :

$$R_p = R_0\left(1 - \epsilon^2/4\right) + \mathcal{O}\left(\epsilon^3\right)$$

3. À partir de l'expression d'un élément de longueur d'interface $\mathrm{d}l$ défini par $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}r^2$

$$\mathrm{d}l = \mathrm{d}z\left[1 + \frac{1}{2}R_p^2\epsilon^2k^2\sin^2(kz)\right] + \mathcal{O}\left(\epsilon^3\right)$$

   Montrer que la surface du psudo-cylinfre C s'écrit :

$$S = 4\pi^2\frac{R_0}{k}\left[1 - \frac{\epsilon^2}{4}\left(1 - k^2R_0^2\right)\right] + \mathcal{O}\left(\epsilon^3\right)$$

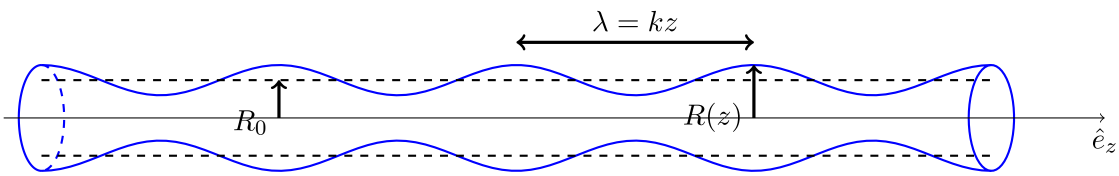

FIGURE 2 – Shéma de l'instabilité

4. Que pouvez-vous conclure sur la stabilité des cylindres C_0 et C à partir des aires S_0 et S ?

1.2 Champs de vitesse et de pression

On assimile lécoulement du liquide de masse volumique ρ à un écoulement parfait, et on considère une perturbation axisymétrique du champs de vitesse $\vec{V}(r,z,t) = \mathcal{R}e\left[\vec{v}(r)\exp\left(\sigma t + ikz\right)\right]$ associée à une perturbation sur champ de pression $P - P_0 = p(r)\exp\left(\sigma t + ikz\right)$ où $\vec{v}(r) = u(r)\hat{e}_r + w(r)\hat{e}_z$ dans la base cylindrique $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z\}$.

1. Écrire l'équation d'Euler et l'équation de conservation de la masse pour la perturbation.
2. En déduire que $p(r)$ est solution de l'équation différentielle :
$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = k^2 p$$
3. La solution de cette équation différentielle est $p(r) = AI_0(kr)$ où I_0 est la fonction de Bessel d'ordre 0. Que représente la constante A ?
4. Montrer que le champ de vitesse est donné par :
$$\begin{cases} u(r,z) = -I_1(kr)\dfrac{Ak}{\rho\sigma} \\[2ex] w(r,z) = -I_0(kr)\dfrac{Aik}{\rho\sigma} \end{cases}$$
où $I_1 = I_0'$ dérivée de I_0 est la fonction de Bessels modifiée d'ordre 1.

1.3 Conditions aux limites

On note $\xi(t)\exp\left(ikz\right)$ la perturbation de la surface du cylindre liquide telle que :
$$R(z,t) - R_0 = \mathcal{R}e\left[\xi\left(t\right)\exp\left(ikz\right)\right]$$

1. Montrer qu'au premier ordre en ϵ on a : $\xi(t) = \epsilon(t)R_0$.
2. Donner la relation liant la vitesse du fluide et $\dfrac{\partial \xi}{\partial t}$.
3. Exprimer le saut de pression $P_{\text{int}} - P_{\text{ext}}$ à l'interface en l'absence de perturbation ; C'est à dire pour le cylindre C_0 et pour une vitesse $\vec{V}_0 = \vec{0}$. En déduire le champ de pression dans le liquide. On notera P_∞ la pression atmosphérique.

En présence de perturbation le saut de pression à l'interface liquide/air est donnée par :
$$P_{\text{int}} - P_{\text{ext}} = \frac{\gamma}{R_0}\left[1 - \epsilon\left(1 - R_0^2k^2\right)\cos\left(kz\right)\right]$$

4. Montrer que en $r = R_p$, on a :
$$p = \frac{\gamma}{R_0^2}\frac{AI_1 k}{\rho\sigma^2}\left(R_0^2 k^2 - 1\right)$$
5. Indiquer sur un dessin de la section C les zones de surpression et les zones de dépression relative suivant la valeur de kR_0. En déduire le signe des écoulements dans chaque ca et l'évolution de la déformation.

1.4 Détermination du taux de croissance

1. Montrer que le taux de croissance σ s'écrit :
$$\sigma^2 = \frac{I_1\left(kR_0\right)}{I_0\left(kR_0\right)}\frac{\gamma}{\rho R_0^2}k\left(1 - R_0^2 k^2\right)$$
2. I_0 et I_1 sont représentés sur la figure 3. En déduire que l'interface est toujours instable pour certaines valeurs de k que l'on précisera. Est ce compatible avec le résultat de la question 1.3-5 ?

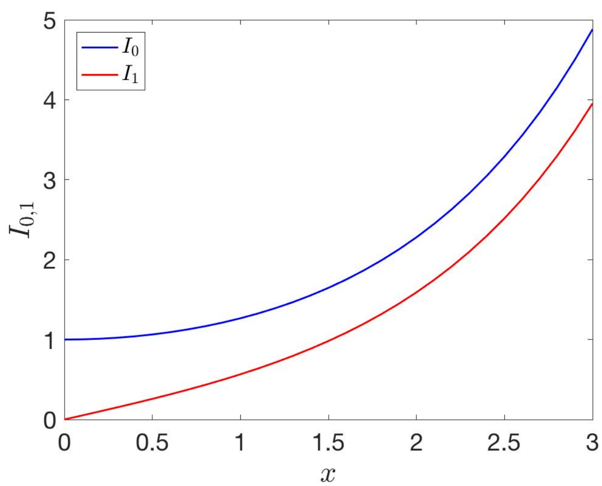

FIGURE 3 – Fonction de Bessel modifiées d'ordre 0 et 1

2 Production d'énergie cinétique turbulente dans une couche limite

On considère un écoulement de couche limite turbulente sur une plaque plane semi-infinie. On note x la direction de l'écoulement (avec $x = 0$ le bord d'attaque de la plaque), y la direction normale à la plaque. On suppose pour simplifier que la vitesse moyenne est strictement horizontale et l'écoulement comme statistiquement invariant selon z.

1. Rappeler comment varie l'épaisseur de la couche limite δ en fonction de x dans le cas turbulent et le comparer au cas laminaire.

Dans toute la suite, on se place à une distance x fixée, et l'on admet que les propriétés de l'écoulement varient très peu selon x (on considèrera donc que $\partial(.)/\partial x = 0$ pour toute quantité physique). On rappelle que dans la sous-couche inertielle (pour $10\delta_v \ll y \ll \delta$), le profil de la vitesse moyenne suit la loi

$$\overline{u_x}(y) = u_\tau \left(\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{\delta_v} \right) + C \right),$$

où u_τ est la vitesse de friction, δ_v l'épaisseur de la sous-couche visqueuse, $\kappa \simeq 0,4$ la constante de von Kármán et $C \simeq 5$.

2. Rappeler (en quelques lignes) la signification physique des notions de sous-couche visqueuse et de sous-couche inertielle, en particulier du point de vue des mécanismes de transport de quantité de mouvement.
3. Rappeler les expressions de u_τ et de δ_v en fonction de la contrainte à la paroi τ_0, de la masse volumique ρ et de la viscosité cinématique ν. Expliquer en quelques lignes la signification physique de u_τ et de δ_v.
4. Donner une condition que doit satisfaire le nombre de Reynolds (que vous devrez définir) pour avoir $\delta \gg \delta_v$.

On cherche maintenant à caractériser les transferts d'énergie entre l'écoulement moyen et les fluctuations turbulentes. On note $k_{tot} = \frac{1}{2}\overline{u_i u_i}$ l'énergie cinétique totale, $k_{moy} = \frac{1}{2}\overline{u_i}\ \overline{u_i}$ l'énergie cinétique moyenne , et $k_{turb} = \frac{1}{2}\overline{u_i' u_i'}$ l'énergie cinétique turbulente (toutes ces énergies sont exprimées par unité de masse). On admet que la puissance transférée (par unité de masse) entre l'écoulement moyen et les fluctuations turbulentes s'écrit sous la forme

$$P = -\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}.$$

Des expériences ont montré que, dans la sous-couche inertielle, le tenseur de Reynolds est approximativement indépendant de y et que ses composantes peuvent s'écrire dans la base (x,y,z)

$$\tau_{ij} = -\rho u_\tau^2 \begin{pmatrix} 4,4 & -1 & 0 \\ -1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 2,2 \end{pmatrix}$$

5. A partir de la décomposition de Reynolds, montrer que
$$k_{tot} = k_{moy} + k_{turb}.$$
6. A partir de l'expression de τ_{ij}, calculer k_{turb} en fonction de u_τ. Pour quelle distance à la paroi y/δ_v a-t-on $k_{moy} = k_{turb}$? Laquelle de ces deux énergies cinétiques domine dans la sous-couche inertielle ?
7. Calculer P en fonction de u_τ, κ et y. Que pensez-vous du comportement de P pour $y \to 0$? Et pour $y \gg \delta$? Tracer l'allure de P en fonction de y. Justifier que P doit être maximal à la transition entre les sous-couches inertielle et visqueuse, et exprimer ce maximum en fonction de u_τ, ν et κ.
8. Dans le cadre du modèle de viscosité turbulente, on suppose que l'on a
$$\tau_{ij} = \rho \nu_T \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right),$$
avec $\nu_T(y) = u_\tau \ell_m(y)$ le coefficient de viscosité turbulente, où $\ell_m(y)$ est la longueur de mélange. A partir de l'expression de τ_{xy}, identifier ce que vaut $\ell_m(y)$ dans ce problème. Quelle est l'interprétation physique de cette quantité ?