Examen d'instabilités et turbulence

lundi 3 avril 2017, durée 3h

I. Instabilité d'un nuage de gaz interstellaire

On considère un nuage de gaz insterstellaire de grande dimension de densité ρ de pression p et de température T. On décrit ce gaz comme un milieu continu dont le champ de vitesse $\vec{u}$ est donné par la loi d'Euler :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{u}) = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p - \rho \vec{\nabla} \phi \end{array} \right. \tag{1}$$

où ρ est la distribution de masse volumique dans le nuage et ϕ la distribution du champ gravitationnel : $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$, avec G la constante de gravitation. La relation entre masse volumique et pression est donnée par la thermodynamique des gaz parfaits : $p = c_s^2 \rho$ (c_s est la vitesse du son).

Pour étudier l'évolution du nuage, Jeans (1902) propose d'étudier la stabilité d'un état de base uniforme donné par une vitesse $\vec{u_0}$, une pression P_0, un champ de gravitation uniforme Φ_0 et une répartition de masse ρ_0. On a alors $\nabla^2 \Phi_0 = 0$ car Φ_0 est uniforme et $\nabla^2 \Phi_0 = \rho_0 \neq 0$; paradoxe connu sous le nom d'"Arnaque de Jeans".

1. On considère une petite perturbation $\tilde{\vec{u}}$, $\tilde{\rho}$, $\tilde{p}$ et $\tilde{\phi}$, écrire les équations régissant l'évolution de la perturbation.
2. Après avoir linéarisé ces équations montrer qu'on obtient le système :

$$\begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \mathrm{div} \tilde{\vec{u}} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \tilde{\vec{u}}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \tilde{p} - \rho_0 \vec{\nabla} \tilde{\phi} \\ \nabla^2 \tilde{\phi} = 4\pi G \tilde{\rho} \\ \tilde{p} = c_s^2 \tilde{\rho} \end{array} \tag{2}$$

3. On exprime les perturbations $\tilde{a}$ sous la forme $\tilde{a} = a \exp \left\{ i \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right\}$. Montrer alors que la pression est donnée par la relation : $\omega^2 p = c_s^2 k^2 p - 4\pi \rho_0 G p$
4. En déduire la relation de dispersion des ondes de pression dans le nuage.
5. En ne considérant que des perturbations de nombre d'onde réel, montrer qu'il existe un nombre d'onde critique k_c en dessous duquel les perturbations sont amplifiées. Vous justifierez votre réponse et donnerez l'expression de k_c en fonction de G, ρ_0 et C_s.

II. Sillage turbulent d'un objet propulsé

Un objet propulsé, comme un avion ou un sous-marin, avance grâce à l'action d'une source d'énergie intérieure, donnant lieu à une force appelée "poussée". Lorsque cet objet propulsé avance à vitesse constante, la poussée

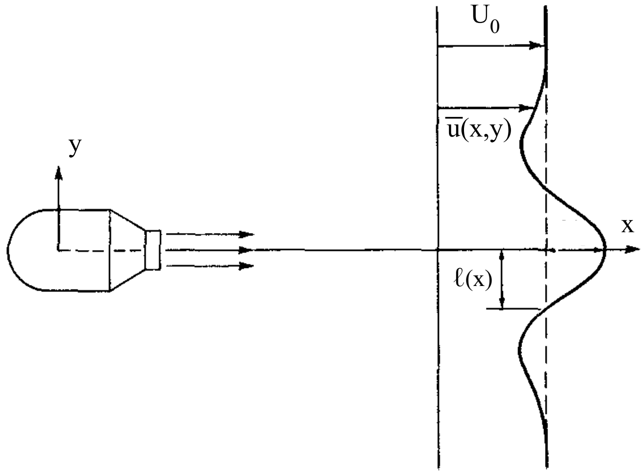

FIGURE 1 – Sillage bi-dimensionnel d'un objet propulsé montrant un profil de la vitesse moyenne $\overline{u}$ non monotone en aval de l'objet.

est exactement compensée par la force de traînée. Le sillage d'un tel objet propulsé diffère notablement de celui d'un objet passif, comme une balle de tennis, qui ne possède pas de source d'énergie intérieure. Dans le cas d'un objet propulsé, on peut montrer en particulier que le profil de vitesse moyen est non monotone (voir figure 1). L'objectif de ce problème est de caractériser ce sillage.
On considère pour simplifier un objet propulsé bi-dimensionnel, invariant selon la direction z, et on étudie son sillage turbulent dans le plan (x, y). L'objet se déplace vers la gauche à vitesse constante $-U_0$. On se place dans le référentiel de l'objet, de sorte qu'il existe un écoulement uniforme $U_0 > 0$ loin de l'objet. On note (u, v) les composantes de la vitesse du fluide selon (x, y) avec $x = 0$ juste à l'arrière de l'objet. Le nombre de Reynolds est supposé très grand, et l'on se place suffisamment loin de l'objet de sorte que la viscosité peut être négligée. On note $\ell(x)$ la largeur caractéristique du sillage à la distance x en aval, et on suppose que $\ell(x) \ll x$. On s'intéresse au défaut de vitesse $\Delta U(x, y) = U_0 - \overline{u}(x, y)$ dans le sillage. On note $U_s(x) = \Delta U(x, 0)$ le défaut de vitesse au centre et on suppose que $U_s \ll U_0$. Contrairement au sillage d'un objet passif, il n'y a pas de débit associé au défaut de vitesse dans le cas d'un objet propulsé tel que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta U(x, y) dy = 0.$$

1. À partir du profil de vitesse moyen de la figure 1, indiquer pour quelles valeurs de y la contrainte visqueuse s'annule. Que pensez-vous de la contrainte turbulente en $y = 0$?
2. Écrire les équations de Reynolds projetées selon x et y.
3. Montrer et justifier à quelles conditions l'équation de Reynolds, projetée dans la direction y, se réduit à

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} = -\rho \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y}.$$

4. Expliquer par quelques lignes explicatives et justifier à quelles conditions, l'équation de Reynolds selon x peut se réduire à

$$U_0 \frac{\partial \Delta U}{\partial x} = \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}. \tag{3}$$

On pourra admettre ce résultat pour la suite.

5. On utilise le modèle de viscosité turbulente tel que

$$-\overline{u'v'} = \nu_T(x) \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}.$$

En multipliant l'équation (3) par y^2 et en intégrant, montrer que l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \Delta U(x,y) dy$$

est indépendante de x. On suppose que ΔU tend plus vite vers zéro que $1/|y|^2$ pour $|y| \to \infty$.

6. On suppose que le sillage vérifie l'hypothèse d'autosimilarité de sorte que

$$\Delta U = U_s(x) f(\xi),$$

où $\xi = y/\ell(x)$ est la coordonnée réduite transverse. Préciser la parité et les conditions aux limites en $\xi = 0$, $\xi = \pm 1$ et $\xi \to \pm\infty$ de la fonction $f(\xi)$.

Exprimer l'intégrale I à partir de ce profil autosimilaire et montrer que

$$U_s(x) \ell(x)^3 = J.$$

Exprimer J en fonction de I et d'une intégrale sans dimension. En déduire une expression entre $\frac{d\ell}{dx}$ et $\frac{dU_s}{dx}$.

7. Exprimer le coefficient de viscosité turbulente $\nu_T(x)$ en fonction d'une longueur et d'une vitesse caractéristique et d'une constante μ, de l'ordre de l'unité.

8. On cherche à déterminer les variations de $U_s(x)$ et de $\ell(x)$ en fonction de x.

Exprimer les dérivées partielles $\partial/\partial x$ et $\partial/\partial y$ en fonction de $\partial/\partial\xi$.

Introduire le profil autosimilaire dans l'équation (3) et montrer que l'on obtient

$$\frac{1}{U_s(x)} \frac{d\ell}{dx} = \alpha,$$

où α est une constante.

9. Les deux lois de conservations mises en évidence permettent d'écrire $U_s(x)$ et $\ell(x)$ sous la forme

$$U_s(x) = Ax^n, \qquad \ell(x) = Bx^m.$$

En déduire les valeurs des exposants n et m. En raisonnant sur le nombre de Reynolds turbulent $Re_T(x) = U_s(x)\ell(x)/\nu$, que pensez-vous du sillage lointain ? Est-ce compatible avec l'évolution de $\nu_T(x)$ avec x ?

10. On a fait l'hypothèse, dans ce problème, que le coefficient de viscosité turbulente ne dépend que de x. Que pensez-vous du choix $\nu_T(x)$ indépendant de y ?

11. Vérifier que $f(\xi) = \dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left[\exp\left(-\dfrac{\xi^2}{2}\right)\right]$ est bien solution de l'équation différentielle établie à la question 8 pour $\alpha = 1$. Vérifier que $f(\xi)$ respecte bien les conditions aux limites en $\xi = \pm 1$, $\xi \pm \infty$ et $\xi = 0$.

12. On suppose également que la contrainte turbulente vérifie l'hypothèse d'autosimilarité telle que

$$-\overline{u'v'} = U_s^2(x) g(\xi).$$

Discuter la parité de $g(\xi)$ et déterminer son expression.