

TD 1 : Comparaison entre écoulements laminaires et turbulents

Exercice 1 : Vitesse de la pluie

On cherche à déterminer la vitesse de chute des gouttes de pluie en régime stationnaire. On néglige en première approximation le mouvement de l'eau dans la goutte, de sorte que celle-ci peut être considérée comme une sphère rigide. Le coefficient de traînée C_x d'une sphère en fonction du nombre de Reynolds $Re = Ud/\nu$ est donné en figure 1 (trait continu).

Les gouttes de pluie considérées sont de diamètre 2 mm. La densité de l'air est $\rho = 1,2 \text{ Kg.m}^{-3}$, et sa viscosité cinématique $\nu = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

1. A partir d'un bilan de forces, calculer la vitesse de chute U des gouttes. On supposera pour cela que la vitesse à calculer est telle que le nombre de Reynolds correspondant se situe dans la région $10^3 < Re < 10^5$ (région turbulente, avant la crise de traînée).
2. Vérifier que la vitesse calculée est bien cohérente avec l'hypothèse faite sur le nombre de Reynolds.
3. Comparer le temps caractéristique de chute d/U au temps d'établissement d'une couche limite laminaire autour de la goutte. Qu'en pensez-vous ?

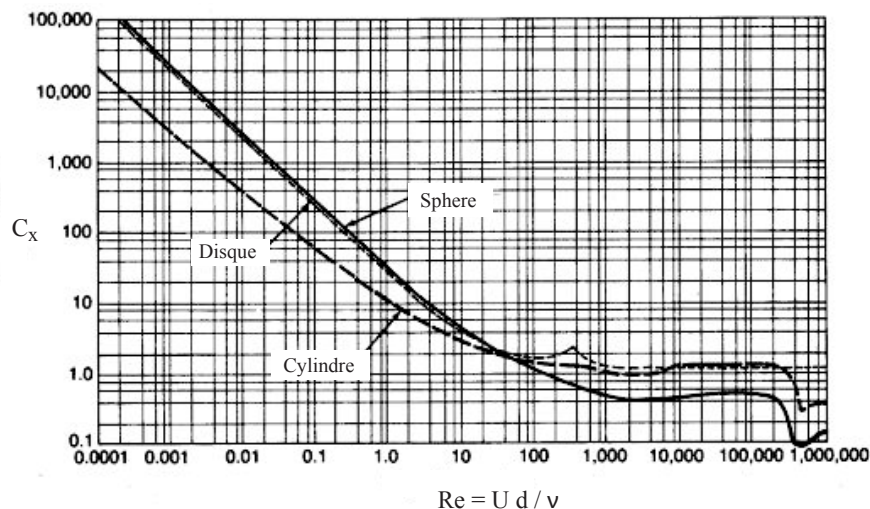


FIGURE 1 – Coefficients de traînée C_x en fonction du nombre de Reynolds.

Exercice 2 : Chauffage d'une pièce

On installe un radiateur, de largeur $\ell = 1 \text{ m}$, pour chauffer une pièce carrée de côté $L \simeq 5 \text{ m}$. On cherche à calculer le temps nécessaire pour atteindre l'équilibre thermique.

1. En raisonnant par analyse dimensionnelle, estimer le temps caractéristique pour atteindre l'équilibre thermique en supposant que seule intervient la diffusion thermique. La viscosité cinématique de l'air est $\nu = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, et le nombre de Prandtl est $Pr = \nu/\kappa \simeq 0,7$ (κ est la diffusivité thermique de l'air).

2. Pour estimer la vitesse de convection naturelle v à la verticale du radiateur, on suppose que l'énergie potentielle associée au défaut de densité de l'air chauffé se convertit en énergie cinétique. En considérant l'air comme un gaz parfait, le coefficient de dilatation thermique $\alpha = -1/\rho \partial\rho/\partial T$ vaut $1/T_0 \simeq 1/300 \text{ K}^{-1}$. En prenant une élévation de température de $\Delta T \simeq 10^\circ\text{C}$, sur une hauteur $h \simeq 0.1 \text{ m}$, estimer v .
3. On suppose que le mouvement d'air dans la pièce induit par cette convection a une vitesse d'environ 20 % de la vitesse au-dessus du radiateur. En déduire le temps d'équilibre thermique, et comparer au temps diffusif obtenu en 1.

Exercice 3 : Écoulement turbulent en déclin

Un récipient de dimension $L \simeq 50 \text{ cm}$ est rempli d'eau ($\nu = 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ à 20°C), en écoulement très turbulent. Cette turbulence est caractérisée à $t = 0$ par des tourbillons de taille moyenne $\ell \simeq 10 \text{ cm}$ et de vitesse $v_0 \simeq 1 \text{ m/s}$. En l'absence de forçage extérieur, l'énergie cinétique totale $E(t) = mv^2/2$ va décliner au cours du temps, selon une loi que nous allons chercher à déterminer.

1. Estimer le nombre de Reynolds initial de l'écoulement.
2. On suppose que la dissipation d'énergie est, aux temps courts, dominée par les mouvements turbulents, et que la taille caractéristique des tourbillons reste ℓ . En supposant que l'énergie se dissipe sur un temps caractéristique inertiel $\ell/v(t)$, obtenez une équation différentielle pour $v(t)$.
3. En déduire la loi de déclin turbulent $v(t)$, et estimer le temps t_v au bout duquel le nombre de Reynolds de l'écoulement devient de l'ordre de 10.
4. Au-delà de ce temps t_v , l'écoulement devient laminaire et ce sont les forces de frottement visqueux qui dominent la dissipation d'énergie. En supposant une force de frottement de la forme $f \simeq c\eta\ell v$ (force de Stokes), où c est une constante sans dimension, en déduire une nouvelle équation différentielle pour $v(t)$.
5. Intégrer la loi de déclin visqueux $v(t)$ pour $t > t_v$, et en déduire la constante c pour que les deux lois se raccordent en $t = t_v$. Tracer l'allure de $v(t)$ pour tout $t \geq 0$ en coordonnées logarithmiques.

Exercice 4 : Longueur d'entrée

En sortie d'une chambre de tranquillisation, située en $x < 0$, un fluide pénètre à vitesse moyenne U dans une conduite parallélépipédique en $x > 0$. La dimension transverse (selon z) de cette conduite est supposée très grande devant sa hauteur h (selon y). On peut donc considérer le problème comme invariant selon z , et se restreindre à une étude bidimensionnelle dans le plan xOy .

On appelle longueur d'entrée L la distance au-delà de laquelle l'écoulement est *établi*, c'est-à-dire telle que le profil de vitesse devient invariant selon x . Cette longueur d'entrée peut être approximativement définie comme la distance x à laquelle les couches limites sur les plans supérieurs et inférieurs (en $y = 0$ et $y = h$) s'interpénètrent.

1. Retrouver, en raisonnant sur le transport convectif et diffusif de la quantité de mouvement, la loi d'évolution de l'épaisseur de couche limite $\delta(x)$ en fonction de la distance x dans les cas laminaire et turbulent.
2. En déduire que la variation de la longueur d'entrée avec le nombre de Reynolds $Re = Uh/\nu$ peut s'écrire sous la forme adimensionnée :

$$\frac{L}{h} \propto Re^n.$$

Déterminer la valeur de l'exposant n dans les cas laminaire et turbulent, puis tracer l'allure de la courbe $L/h = f(Re)$ en faisant apparaître le nombre de Reynolds de transition $Re_c \simeq 2000$.

TD 2 : Le jet immergé

Une plaque plane verticale infinie sépare deux régions de l'espace contenant de l'eau, à pression $p_0 + \Delta p$ en $z < 0$ et p_0 en $z > 0$ (fig. 2). Dans cette plaque, maintenue fixe, est percé un petit orifice circulaire de diamètre d . On s'intéresse au jet d'eau issu de cet orifice, débouchant à la vitesse constante U_j dans l'eau au repos de la région de droite. On suppose que la pression reste égale à p_0 en tout point $z > 0$, et que le jet est stationnaire en moyenne (il peut exister des fluctuations turbulentes autour de cette moyenne, mais leur amplitude reste faible). On note ρ la densité de l'eau (supposée indépendante de p) et ν sa viscosité cinématique. On ne considère pas l'effet de la gravité. Le jet est axisymétrique, et les composantes de la vitesse sont $(u_r, 0, u_z)$ en coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

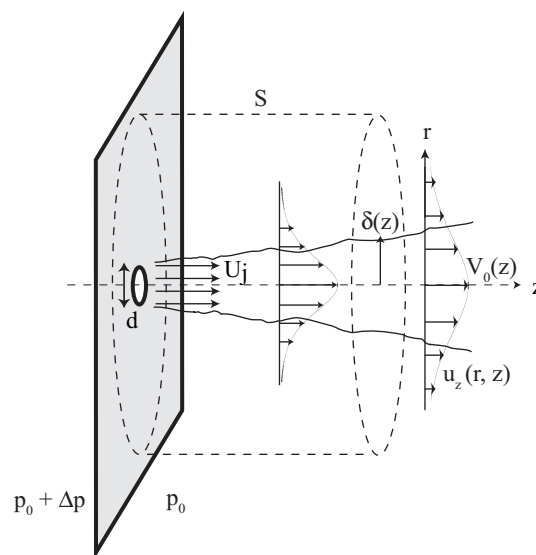


FIGURE 2 – Jet d'eau immergé dans l'eau.

1. On cherche à caractériser le taux d'élargissement local $S(z)$ du jet, défini comme le rapport $\delta(z)/z$, où $\delta(z)$ est la largeur caractéristique du jet. En supposant que $S(z)$ soit fonction de z , U_j , d et ν , montrer par application du théorème de Buckingham que $S = f(z/d, Re)$, où $Re = U_j d / \nu$ est le nombre de Reynolds du jet.
2. Dans la limite des très grands nombres de Reynolds, et pour des distances z suffisamment grandes comparées à d , ce taux d'expansion local doit devenir indépendant de d et de ν . Que peut-on en déduire sur S ?

Dans toute la suite, on se place dans la situation où $Re \gg 1$, à grande distance de l'orifice ($z \gg d$). Dans cette région, le profil de vitesse garde la même forme, dite "auto-similaire",

$$u_z(r, z) = V_0(z) f(\xi).$$

$V_0(z)$ est la vitesse au centre du jet, et $f(\xi)$ est une fonction sans dimension de la coordonnée radiale réduite $\xi = r/\delta(z)$, avec $\delta(z)$ la largeur locale du jet définie telle que : $u_z(r = \delta(z), z) = \frac{1}{2} V_0(z)$. (on a par construction $f(0) = 1$ et $f(1) = 1/2$). On suppose en outre que la fonction $f(\xi)$ décroît vers 0 lorsque $\xi \rightarrow \infty$ plus vite

que $1/\xi^2$, et l'on pose pour $n \geq 1$

$$I_n = \int_0^\infty f(\xi)^n \xi d\xi.$$

On rappelle l'expression du théorème de transport de Reynolds pour la variation d'une quantité $A(\vec{r}, t)$ quelconque (A peut être un scalaire ou une composante d'un vecteur) dans un volume de contrôle \mathcal{V} délimité par une surface matérielle \mathcal{S} :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} A(\vec{r}, t) d^3r = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} A(\vec{r}, t) d^3r + \iint_{\mathcal{S}} A(\vec{r}, t) \vec{v} \cdot d^2\vec{S}.$$

3. Faire un bilan des forces extérieures \vec{F}_{ext} s'exerçant sur le fluide contenu dans le volume de contrôle \mathcal{V} représenté sur la figure (la face d'entrée en $z = 0$ est dans le fluide en contact avec la plaque, la face de sortie est en z quelconque, et le rayon R est supposé grand devant la largeur du jet). On exprimera \vec{F}_{ext} en fonction de Δp , et on justifiera que p_0 n'intervient pas dans cette expression.
4. A partir du théorème de transport appliqué à la densité de quantité de mouvement $\rho \vec{v}(\vec{r}, t)$, montrer que $V_0(z)$ et $\delta(z)$ vérifient la relation :

$$[V_0(z)\delta(z)]^2 = \frac{d^2}{8I_2} \left(\frac{\Delta p}{\rho} + U_j^2 \right).$$

En déduire qualitativement la variation de $V_0(z)$ avec z .

5. En supposant l'écoulement parfait sur une ligne de courant horizontale entre $z = -\infty$ (où la vitesse est nulle) et $z = 0^+$ (juste en sortie de l'orifice), exprimer Δp en fonction de U_j , et simplifier l'expression précédente. Justifier que ce même raisonnement appliqué entre $z = 0^+$ et $z = \infty$ est incompatible avec les hypothèses de l'énoncé, et discuter.
6. On observe expérimentalement (voir la figure 3) que l'élargissement du jet est approximativement linéaire, $\delta(z) \simeq Sz$ pour $z \gg d$, avec $S \simeq 0,10$. Montrer que le débit $Q(z)$ à travers une section plane verticale d'abscisse z vérifie

$$\frac{Q(z)}{Q_j} \simeq \alpha S \frac{z}{d}$$

pour $z \gg d$, où Q_j est le débit en sortie de l'orifice et α une constante sans dimension que l'on exprimera en fonction de I_1 et I_2 . Que pensez-vous de ce résultat ?

7. A partir de l'équation de continuité, exprimer $1/r \partial(ru_r)/\partial r$, et déterminer son signe en $r = 0$. Commentez le signe de $u_r(r, z)$ et sa dépendance en r pour $r \rightarrow \infty$ (à z fixé) ? En déduire l'allure de u_r en fonction de r à z fixé pour tout $r > 0$ (on précisera son ordre de grandeur en fonction de la vitesse longitudinale $V_0(z)$).
8. Dessiner l'allure des lignes de courant à l'intérieur et à l'extérieur du jet.

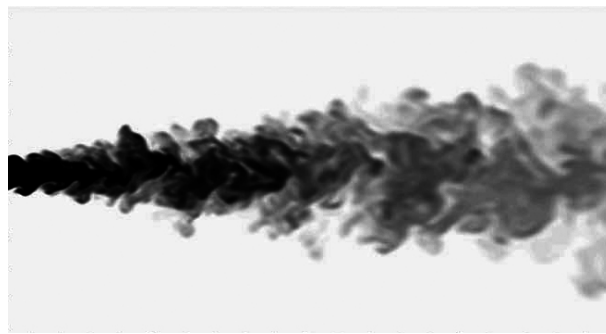


FIGURE 3 – Visualisation d'un jet immergé par injection de colorant (Purdue University).

TD 3 : Equations de Reynolds

Exercice 1 : Transport turbulent de chaleur

On considère un écoulement turbulent entre deux plaques planes lisses distantes de L et maintenues à température T_1 et $T_2 > T_1$ (fig. 4). On se place suffisamment loin de l'entrée pour considérer l'écoulement comme pleinement développé, c'est à dire que les moyennes de la vitesse ne dépendent pas de la coordonnée x . Malgré les fluctuations de température, on néglige les variations de densité. On s'intéresse au flux de chaleur $\vec{j}_Q = -k\vec{\nabla}T$ entre la plaque chaude et la plaque froide (où k est la conductivité thermique, en $\text{W K}^{-1}\text{m}^{-1}$).

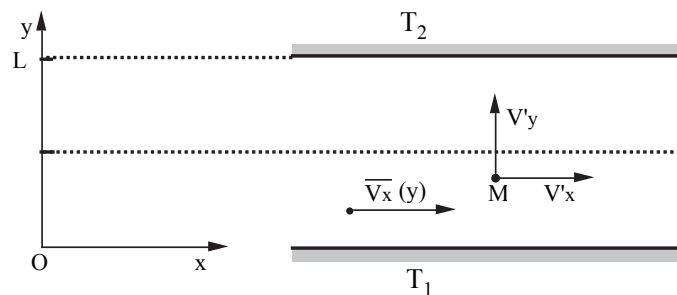


FIGURE 4 – Écoulement turbulent entre deux plaques planes à différentes températures.

1. En partant du bilan local d'énergie thermique par unité de volume,

$$\frac{De}{Dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_Q = 0,$$

retrouver l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}.$$

Comparer le temps typique d'homogénéisation de la température en l'absence d'écoulement, et en présence d'un écoulement turbulent dont les fluctuations sont de l'ordre de u' . On prendra $L = 10 \text{ cm}$, $u' = 10 \text{ cm/s}$ et $\kappa = 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

2. Les champs de vitesse v_i et de température T étant tous les deux fluctuants, on introduit la décomposition *moyenne temporelle + fluctuation* :

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i, \quad T = \bar{T} + T',$$

où $\bar{u}'_i = 0$ et $\bar{T}' = 0$. Rappeler l'équation de continuité pour la vitesse moyenne et la fluctuation. En introduisant cette décomposition dans l'équation de la chaleur, puis en moyennant, montrer que l'équation pour la température moyenne s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\overline{T' u'_i} + \kappa \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \right).$$

Interpréter chacune des deux contributions du membre de droite. Calculer le flux de chaleur vertical moyen j_{Qy} .

3. On ne tient pas compte ici du détail du champ de vitesse, et on se contente de considérer que les fluctuations typiques sont de l'ordre de u' dans tout l'écoulement. En admettant que les fluctuations typiques de température $\sqrt{T'^2}$ sont de l'ordre de $\Delta T/10$, comparer l'efficacité du transport turbulent de chaleur par rapport au seul transport diffusif.

Exercice 2 : Le sillage turbulent

On s'intéresse au sillage turbulent en aval d'un cylindre d'axe perpendiculaire au plan de la figure. Le sillage a un plan de symétrie $y = 0$ parallèle à l'écoulement moyen extérieur. On suppose que la demi-largeur moyenne $\ell(x)$ du sillage à une distance x est faible devant x . On néglige l'accélération de la pesanteur et on se place suffisamment loin de l'obstacle pour que la taille finie de celui-ci n'influence plus la forme du sillage. On note U_0 et p_0 la vitesse et la pression à l'infini.

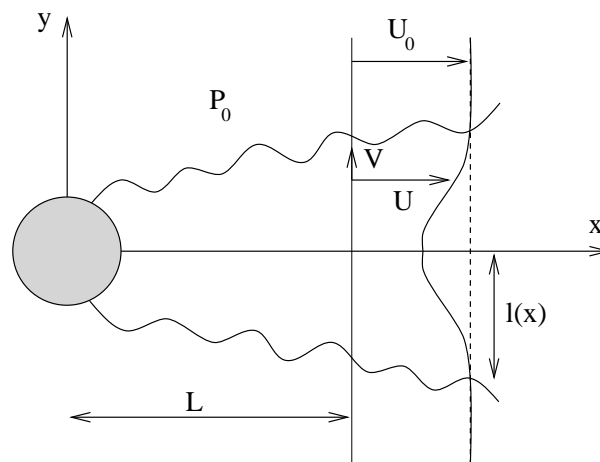


FIGURE 5 – Sillage turbulent bidimensionnel en aval d'un cylindre.

On note respectivement u et v les composantes de la vitesse selon les directions x et y . On s'intéresse au défaut de vitesse $\Delta U = U_0 - \bar{u}(x, y)$ à l'aval du cylindre. On note $U_s(x) = \Delta U(x, 0)$ le défaut de vitesse au centre du sillage avec, assez loin de l'obstacle, $U_s \ll U_0$. On rappelle l'équation de Reynolds (avec \bar{u}_i la vitesse moyenne et u'_i la fluctuation) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_i + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i \right). \quad (1)$$

1. A partir de l'équation de l'incompressibilité, donner l'ordre de grandeur de la vitesse verticale V en fonction de U_s , ℓ et L .
2. Écrire les équations de Reynolds en régime statistiquement stationnaire pour les composantes u et v , et évaluer les ordres de grandeur des différents termes de l'équation de Reynolds vérifiée par la composante v (sauf celui de pression), en prenant comme ordre de grandeur des fluctuations $\overline{u'v'} \sim \overline{u'^2} \sim \overline{v'^2} \sim u^{*2}$. Montrer alors que le terme visqueux est négligeable devant le terme de transport turbulent $\partial \overline{v'^2} / \partial y$ si

$$R_\ell \gg \frac{U_s \ell}{u^* L},$$

où $R_\ell = u^* \ell / \nu$ est le nombre de Reynolds local de la turbulence. Montrer que tous les termes d'advection par l'écoulement moyen sont négligeables par rapport à $\partial \overline{v'^2} / \partial y$ si

$$\frac{U_0 U_s}{u^{*2}} \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 \ll 1.$$

3. Montrer que, si les deux conditions précédentes sont vérifiées, l'équation de Reynolds de la composante v se réduit à :

$$\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}.$$

En intégrant cette équation pour calculer la pression moyenne \bar{p} , montrer que l'équation de Reynolds de la composante u peut s'écrire :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'^2} - \overline{v'^2}) - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \bar{u}. \quad (2)$$

En évaluant les différents termes et en les comparant au terme $\partial \overline{u'v'}/\partial y$, montrer que (2) peut prendre la forme approchée :

$$U_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

si $(U_s/u^*)(1/R_\ell) \ll 1$ et $(U_s^2/u^{*2})(\ell/L) \ll 1$.

4. En déduire que le flux de quantité de mouvement "déficitaire" à travers toute la section du sillage,

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \rho U_0 (\bar{u} - U_0) dy, \quad (4)$$

est indépendant de la distance x .

5. On suppose que le sillage vérifie l'hypothèse d'autosimilarité, c'est à dire que les grandeurs ΔU et $\overline{u'v'}$ s'écrivent sous forme d'un produit de $U_s(x)$ et d'une fonction de la distance normalisée $y/\ell(x)$ à l'axe :

$$U_0 - \bar{u} = U_s(x) f(y/\ell(x)) \quad \overline{u'v'} = U_s^2(x) g(y/\ell(x)). \quad (5)$$

Montrer à partir de l'équation (4) que $U_s(x)$ est alors proportionnelle à $1/\ell(x)$.

6. Pour déterminer la relation entre $\ell(x)$ et x , on écrit que, en raison de l'hypothèse d'autosimilarité, l'équation (3) doit pouvoir s'écrire sous une forme normalisée où intervient seulement la variable $y/\ell(x)$. En déduire que

$$\frac{\ell}{U_s^2} \frac{dU_s}{dx} = \frac{cste}{U_0}. \quad (6)$$

Montrer que $U_s(x)$ et $\ell(x)$ ont une variation en loi de puissance en fonction de x : quels sont les exposants correspondants ? En utilisant l'équation (5), calculer l'ordre de grandeur des fluctuations de vitesse u^* et du nombre de Reynolds local R_ℓ et leur variation avec la distance x .

TD 4 : Couche de mélange turbulente

Deux régions d'un fluide s'écoulant à des vitesses différentes U_1 (en $y > 0$) et U_2 (en $y < 0$) se retrouvent à l'issue d'une plaque séparatrice en $x = 0$ (figure 7). Il se forme à l'interface entre ces deux régions une *couche de cisaillement* (ou *couche de mélange*). A mesure que l'on s'éloigne en aval, le saut de vitesse $U_1 - U_2$ tend à s'étaler dans la direction transverse. Cette situation est générique d'un grand nombre d'écoulements, en particulier à la frontière d'un jet où d'un sillage.

On note (u, v) les composantes de la vitesse selon (x, y) , avec x la direction longitudinale et y la direction transverse. L'extension selon z (normale au plan de la figure) est très grande devant les autres dimensions, de sorte que l'écoulement est statistiquement invariant selon z et peut être considéré comme bidimensionnel. On pose :

$$U_m = \frac{1}{2} (U_1 + U_2), \quad \text{vitesse moyenne} \quad (7)$$

$$\Delta U = U_1 - U_2 \quad \text{saut de vitesse,} \quad (8)$$

et on se restreint à la situation d'une petite discontinuité de vitesse de part et d'autre de la couche de cisaillement ($U_m \gg \Delta U$). On note L l'échelle de longueur caractéristique selon x et δ celle selon y , avec $\delta \ll L$. On introduit le nombre de Reynolds $Re_\delta = U_m \delta / \nu$, supposé $\gg 1$. Enfin, on suppose que l'ordre de grandeur des fluctuations turbulentes est donné par ΔU (soit $u'^2 \simeq v'^2 \simeq u'v' \simeq \Delta U^2$).

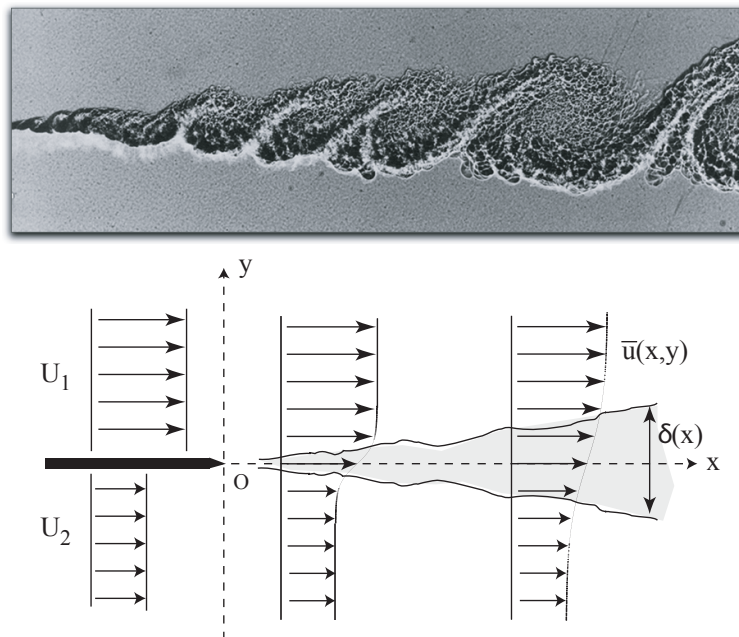


FIGURE 6 – Image par ombroscopie d'une couche de cisaillement turbulente, et définition de l'épaisseur de la couche de cisaillement.

1. Exprimer l'ordre de grandeur de la vitesse latérale V en fonction de ΔU , L et δ . Écrire les équations de Reynolds en régime statistiquement stationnaire pour les composantes u et v , et évaluer les ordres de grandeur des différents termes (à l'exception de celui de pression). Montrer que les termes visqueux sont

négligeables devant les termes inertiels et les termes de transport turbulent si

$$\text{Re}_\delta \gg L/\delta \quad \text{et} \quad \text{Re}_\delta \gg U_m/\Delta U.$$

2. Si l'on suppose de plus que $(\delta/L)^2 \ll \Delta U/U_m$, montrer que les équations de Reynolds peuvent s'écrire :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \quad (9)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y}. \quad (10)$$

Exprimer la pression moyenne \bar{p} en fonction de la pression à l'infini $\bar{p}(x, y = \pm\infty) = p_0 = \text{cste}$ et des fluctuations de vitesse. En déduire que l'équation de Reynolds selon x se réduit à :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}. \quad (11)$$

A une distance x en aval de la plaque séparatrice, on définit la largeur $\delta(x)$ de la couche de cisaillement par la relation :

$$\bar{u} \left(x, y = \pm \frac{1}{2} \delta(x) \right) = U_m \pm 0,4 \Delta U.$$

Suffisamment loin en aval, les mesures expérimentales montrent que le profil de vitesse $\bar{u}(x, y)$ est auto-similaire : sa largeur $\delta(x)$ croît, mais le profil garde la même forme lorsqu'il est exprimé en fonction de la coordonnée réduite $Y = y/\delta(x)$. On pose donc

$$\bar{u}(x, y) = U_m + \Delta U f(Y), \quad (12)$$

où la fonction sans dimension $f(Y)$ ne dépend que de Y . Dans la limite $\Delta U \ll U_m$, on suppose en outre que le profil de vitesse est symétrique autour de la vitesse moyenne (f est impaire).

3. Tracer l'allure de la fonction $f(Y)$, en faisant apparaître en particulier les valeurs $Y = 0, \pm 1/2, \pm\infty$. A partir de la relation d'incompressibilité, montrer que la vitesse moyenne latérale peut elle aussi s'exprimer de façon autosimilaire :

$$\bar{v} = \Delta U \frac{d\delta}{dx} F(Y). \quad (13)$$

On exprimera $F(Y)$ à partir de $f(Y)$ (en prenant soin de discuter le comportement de $f(Y)$ pour $Y \rightarrow \pm\infty$). En tenant compte de la parité de f , tracer l'allure du profil $\bar{v}(x, y)$. Interpréter physiquement ce profil de vitesse (en particulier son signe).

4. Nous supposons enfin que les contraintes de Reynolds sont elles aussi autosimilaires, c'est-à-dire que les corrélations de vitesse peuvent s'écrire

$$\overline{u'v'} = \Delta U^2 g(Y). \quad (14)$$

En substituant les profils autosimilaires dans l'équation de Reynolds (11), et en utilisant $U_m \gg \Delta U$, montrer que :

$$\frac{Y f'(Y)}{g'(Y)} = \frac{\Delta U}{U_m} \left(\frac{d\delta}{dx} \right)^{-1} \quad (15)$$

(les primes désignent la dérivation par rapport à Y). En déduire que le taux d'élargissement $S = d\delta/dx$ de la couche de cisaillement est constant.

1. L'approximation $U_2 \simeq U_1$ ($\Delta U \ll U_m$) permet effectivement de supposer que $\bar{p}(y = +\infty) \simeq \bar{p}(y = -\infty)$.

Afin de déterminer la forme du profil de vitesse, on utilise le modèle de viscosité turbulente : on suppose la proportionnalité de la contrainte de Reynolds $\tau_{xy} = -\rho \overline{u'v'}$ avec la déformation moyenne,

$$\tau_{xy} = \rho \nu_T(x, y) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (16)$$

5. Décrire qualitativement les structures responsables du transport de quantité de mouvement d'une région de l'écoulement à l'autre. Justifier alors qu'il est légitime d'écrire le coefficient de viscosité turbulente de la façon suivante :

$$\nu_T(x, y) = \mu \Delta U \delta(x) \quad (17)$$

(μ est une constante sans dimension).

6. Montrer que cette modélisation (16)-(17) permet d'écrire l'équation de Reynolds adimensionnée (15) sous la forme :

$$f''(Y) + \frac{1}{\sigma^2} Y f'(Y) = 0. \quad (18)$$

On identifiera la constante σ en fonction de S , μ et $U_m/\Delta U$. Vérifier que la fonction

$$f(Y) = \int_0^Y \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-Y^2/2\sigma^2} dY$$

est bien solution de l'équation différentielle, compatible avec les conditions aux limites. Que pensez-vous du profil de vitesse lorsque la condition $\Delta U/U_m \ll 1$ n'est plus respectée ?

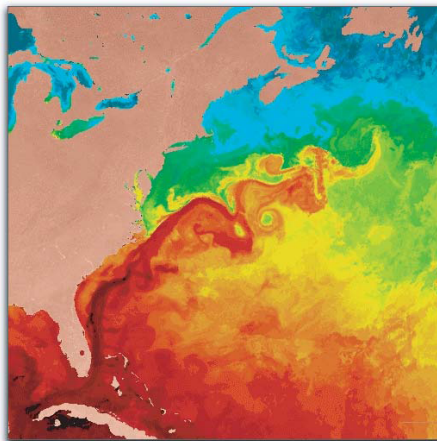


FIGURE 7 – Un exemple de couche de cisaillement : le Gulf Stream.

TD 5 : Couche limite turbulente

On considère un écoulement uniforme de vitesse U au-dessus d'une plaque plane horizontale semi-infinie, dont le bord d'attaque est en $x = 0$ (fig. 8). On introduit le nombre de Reynolds par rapport au bord d'attaque, $Re_x = Ux/\nu$.

1. En raisonnant sur les temps caractéristiques d'advection horizontale et de diffusion verticale, donner la variation de l'épaisseur $\delta(x)$ de la couche limite dans le cas laminaire. Même question dans le cas turbulent, en considérant que la diffusion verticale de quantité de mouvement est assurée par les fluctuations turbulentes (on prendra $u' \simeq U/10$).
2. A partir des résultats précédents, en déduire l'ordre de grandeur de la contrainte pariétale (contrainte à la paroi) dans les cas laminaire et turbulent. Estimer la variation du coefficient de friction

$$C = \frac{\tau_{xy}}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

en fonction du nombre de Reynolds dans chaque cas. Tracer l'allure de $C(Re_x)$ en coordonnées logarithmiques, sachant que la transition laminaire-turbulent a lieu pour $Re_x \simeq 10^5$.

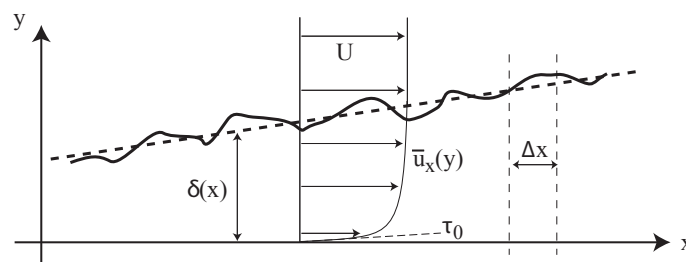
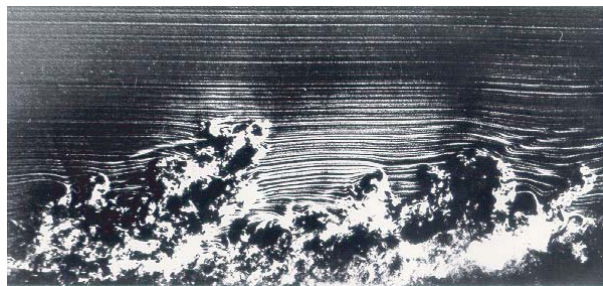


FIGURE 8 – Visualisation par lignes de colorant d'une couche limite turbulente, et schéma du profil de vitesse moyen et de l'épaisseur $\delta(x)$.

Dans toute la suite, on se place dans le cas turbulent. On considère une petite région de largeur Δx de la couche limite, suffisamment loin de l'origine ($\Delta x \ll x$). On suppose que dans cette région l'écoulement est statistiquement stationnaire, et que les statistiques des fluctuations de vitesse sont indépendantes de x .

3. Montrer qu'il est possible de négliger $\overline{u_y}$ dans cette région, et écrire les équations de Reynolds selon x et y .

4. Calculer $\bar{p}(x, y)$, et montrer que $\partial\bar{p}/\partial x$ est constant dans tout l'écoulement. En déduire que la contrainte totale s'exprime sous la forme

$$\tau^{tot}(y) = \tau_0 + \frac{\partial\bar{p}}{\partial x}y,$$

où τ_0 est la contrainte à la paroi.

5. Dessiner l'allure du profil de contrainte totale τ^{tot} en fonction de y dans le cas d'un gradient de pression $\partial\bar{p}/\partial x < 0$ (gradient favorable). Dessiner intuitivement l'allure des contributions visqueuse et turbulente de la contrainte totale.
6. Très près de la paroi, la contrainte totale est essentiellement de nature visqueuse. Si l'on néglige la variation de τ^{tot} avec y , en déduire la forme du profil de vitesse $\bar{u}_x(y)$ dans cette région.
7. Pour calculer l'épaisseur δ_v de cette sous-couche visqueuse, on suppose que la vitesse moyenne $\bar{u}_x(y = \delta_v)$ doit être de l'ordre de la *vitesse de friction* u^* , définie telle que

$$\tau_0 = \rho u^{*2}.$$

En déduire l'épaisseur de la sous-couche visqueuse. Que vaut le nombre de Reynolds local associé $u^*\delta_v/\nu$?

Loin de la paroi, on suppose au contraire que le transport de quantité de mouvement est essentiellement convectif (viscosité négligeable). Nous allons déterminer la forme du profil de vitesse dans la *sous-couche inertielle*, telle que $\delta_v \ll y \ll \delta$. On se place dans la situation d'un gradient de pression $\partial\bar{p}/\partial x$ négligeable. On modélise la contrainte de Reynolds en introduisant un coefficient de viscosité turbulente :

$$\tau_{ij} = \rho\nu_T \left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i} \right),$$

avec $\nu_T(y) = \kappa\ell(y)u^*(y)$, où κ est une constante sans dimension, $\ell(y)$ est l'échelle caractéristique des structures turbulentes (appelée *longueur de mélange*) et u^* est la vitesse caractéristique de ces structures.

8. En raisonnant sur les structures turbulents les plus efficaces pour transférer la quantité de mouvement, justifiez le choix $\ell(y) = y$. En supposant en outre que les fluctuations u^* sont indépendantes de y , montrer que le profil de vitesse moyen peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\bar{u}_x}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{\delta_v} \right) + C.$$

Déterminer la valeur de C pour que ce profil se raccorde avec le profil déterminé dans la sous-couche visqueuse en $y = \delta_v$ (question 6). Dessiner l'allure de ce profil pour des distances $y < \delta_v$ et $y > \delta_v$.

9. La figure 9 représentent des profils de couche limite turbulente pour différents nombres de Reynolds. On voit que le raccort entre les sous-couches visqueuse et inertielle a lieu pour $y \simeq 10\delta_v$. En déduire la valeur expérimentale de κ .

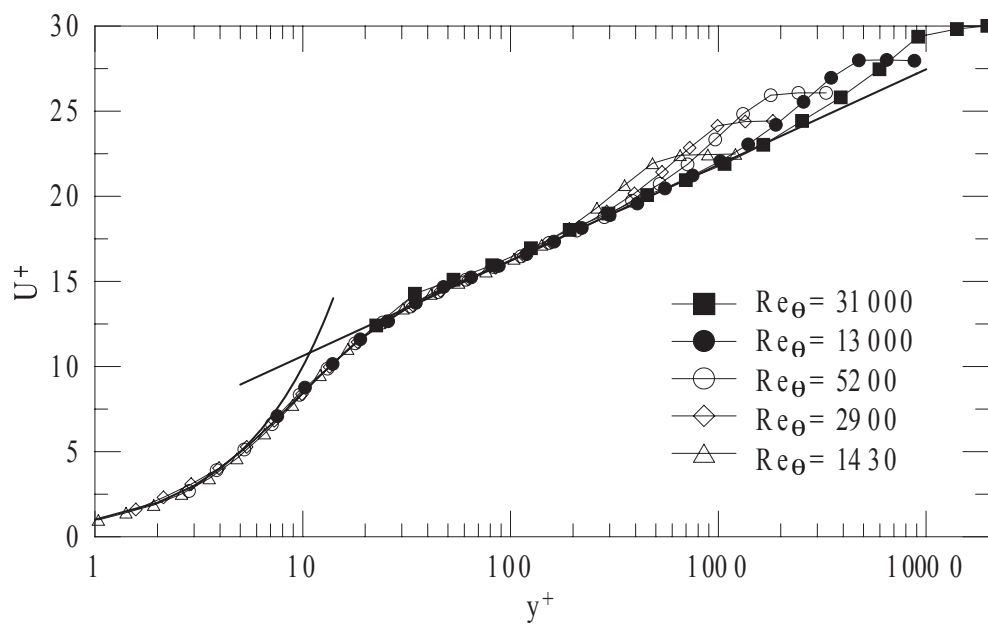


FIGURE 9 – Vitesse normalisée $U^+ = \overline{u_x}/u^*$ en fonction de la distance normalisée $y^+ = y/\delta_v$ (Document B.D. DeGraaf, 1999).

TD 6 : Écoulement de Couette turbulent

On considère un écoulement de Couette entre deux plaques planes parallèles infinies séparées d'une distance $2h$, animées d'une vitesse $2U_0$ l'une par rapport à l'autre (voir la figure 10). On se place dans le référentiel tel que la plaque supérieure ait une vitesse $+U_0$ et la plaque inférieure une vitesse $-U_0$. On note $Re = U_0 h / \nu$ le nombre de Reynolds de l'écoulement. La direction transverse (perpendiculaire au plan de la figure) étant très grande devant h , on peut considérer le problème comme purement bidimensionnel. Il n'existe pas de gradient de pression moyen selon x , et toutes les quantités physiques sont supposées statistiquement stationnaires et invariantes par translation selon x .

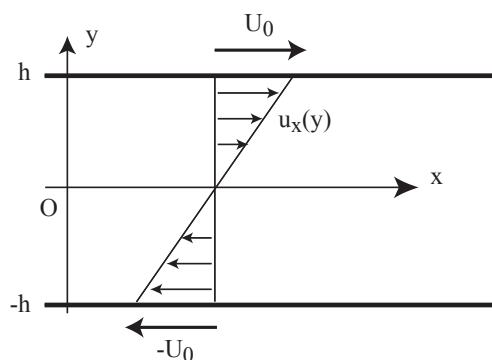


FIGURE 10 – Géométrie de l'écoulement de Couette plan, et profil de vitesse correspondant dans le cas laminaire.

1. On sait que, dans le cas laminaire, le profil de vitesse dans cette géométrie est donné par $u_x(y) = U_0 y/h$. On cherche à déterminer si, dans le cas turbulent, le profil de vitesse moyen $\bar{u}_x(y)$ peut également s'écrire sous cette forme. En introduisant la solution $\bar{u}_x(y) = U_0 y/h$ dans l'équation de Reynolds selon x , montrer que $\overline{u'_x u'_y} = 0$ dans tout l'écoulement. Qu'en concluez-vous ?
2. On va chercher à déterminer le profil moyen $\bar{u}_x(y)$ dans le cas turbulent. On introduit la coordonnée réduite $\xi = y/h$, et on pose

$$\begin{aligned} \bar{u}_x(y) &= U_0 f(\xi) \\ \overline{u'_x u'_y} &= U_0^2 g(\xi). \end{aligned} \quad (19)$$

Montrer que l'on a

$$f'' = Re g', \quad (20)$$

où les primes désignent les dérivées par rapport à ξ . Préciser la parité et les conditions aux limites en $\xi = \pm 1$ des fonctions $f(\xi)$ et $g(\xi)$.

3. Pour déterminer la fonction $f(\xi)$, il faut une relation supplémentaire reliant f et g . Pour cela, on peut introduire un coefficient de viscosité turbulente $\nu_T(y)$ tel que :

$$-\overline{u'_x u'_y} = \nu_T(y) \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}. \quad (21)$$

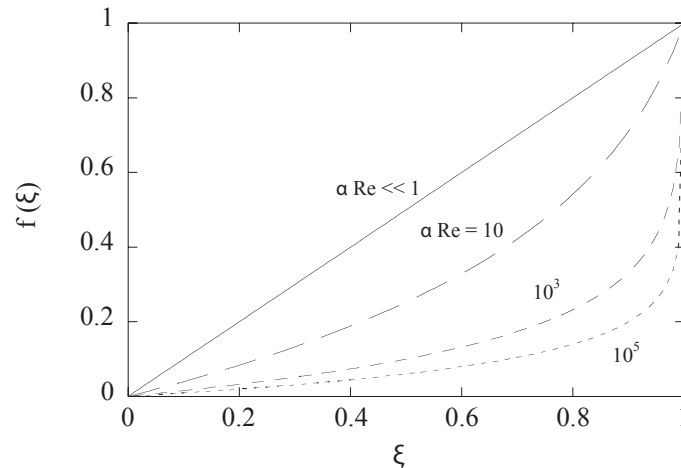


FIGURE 11 – Profils de vitesse adimensionnés (22) pour différentes valeurs de αRe .

On suppose que les fluctuations responsables du transfert de quantité de mouvement sont de vitesse caractéristique U_0 et de taille $\ell(y)$, et l'on pose donc

$$\nu_T(y) = \alpha U_0 \ell(y),$$

où α est une constante sans dimension. Justifier que l'on peut choisir $\ell = h - |y|$. Par symétrie, on pourra ne considérer que la moitié supérieure ($y > 0$), et ainsi oublier la valeur absolue. En déduire une relation entre g et f' puis, en utilisant l'équation (20), obtenir l'équation différentielle suivante :

$$\phi'(1 + (\alpha Re)^{-1} - \xi) = \phi,$$

où l'on a posé $\phi(\xi) = f'(\xi)$.

4. En introduisant le changement de variable $Z = \xi/(1 + (\alpha Re)^{-1})$, intégrer cette équation différentielle (toujours pour $\xi \geq 0$). Montrer finalement que le profil de vitesse s'écrit :

$$f(\xi) = 1 - \frac{\ln(1 + \alpha Re(1 - \xi))}{\ln(1 + \alpha Re)}. \quad (22)$$

Cette fonction est tracée en figure 11 pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. Vérifier (par un développement limité) que l'on retrouve bien la solution laminaire dans la limite $\alpha Re \ll 1$. Que pensez-vous de la limite $Re \rightarrow \infty$?

5. On s'intéresse finalement à la force de frottement due à l'écoulement sur chacune des plaques. On introduit le coefficient de friction

$$C_f = \frac{\tau_{xy}}{\frac{1}{2}\rho U_0^2},$$

où τ_{xy} est la contrainte sur une des plaques.

Calculer C_f en fonction de Re dans le cas laminaire. Montrer que, dans le cas turbulent, ce coefficient devient :

$$C_f = \frac{2\alpha}{\ln(1 + \alpha Re)}.$$

Que pensez-vous d'une telle dépendance avec le nombre de Reynolds ? Vérifier que, dans la limite $\alpha Re \ll 1$, on retrouve bien le C_f du cas laminaire.