Examen de turbulence

Jeudi 4 avril 2013, 14h à 17h

I. Production d'énergie cinétique turbulente dans une couche limite

On considère un écoulement de couche limite turbulente sur une plaque plane semi-infinie. On note x la direction de l'écoulement (avec $x = 0$ le bord d'attaque de la plaque), y la direction normale à la plaque, et l'on considère l'écoulement comme statistiquement invariant selon z.

1. Rappeler comment varie l'épaisseur de la couche limite δ en fonction de x dans le cas turbulent. Comment ce résultat se compare-t-il au cas laminaire ?

Dans toute la suite, on se place à une distance x fixée, et l'on admet que les propriétés de l'écoulement varient très peu selon x (on pourra donc considérer que $\partial(\cdot)/\partial x = 0$ pour toute quantité physique).
On rappelle que dans la sous-couche inertielle (pour $10\delta_v \ll y \ll \delta$), le profil de vitesse moyen suit la loi

$$\overline{u}_x(y) = u_\tau \left(\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{\delta_v} \right) + C \right),$$

où u_τ est la vitesse de friction, δ_v l'épaisseur de sous-couche visqueuse, $\kappa \simeq 0.4$ la constante de von Kármán, et $C \simeq 5$.

2. Rappelez les expressions de u_τ et de δ_v en fonction de la contrainte à la paroi τ_0, de la densité ρ et de la viscosité cinématique ν. Expliquer en quelques lignes la signification physique de u_τ et de δ_v.
3. Donnez une condition que doit satisfaire un nombre de Reynolds (que vous devrez définir) pour avoir $\delta \gg \delta_v$.

On cherche maintenant à caractériser les transferts d'énergie entre l'écoulement moyen et les fluctuations turbulentes. On note $k_{tot} = \frac{1}{2}\overline{u_i u_i}$ l'énergie cinétique totale, $k_{moy} = \frac{1}{2}\overline{u_i}\ \overline{u_i}$ l'énergie cinétique moyenne, et $k_{turb} = \frac{1}{2}\overline{u_i' u_i'}$ l'énergie cinétique turbulente (toutes ces énergies sont exprimées par unité de masse). On admet que la puissance transférée (par unité de masse) entre l'écoulement moyen et l'écoulement turbulent peut s'écrire sous la forme

$$P = -\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}.$$

Des expériences montrent que, dans la sous-couche inertielle, le tenseur de Reynolds est approximativement indépendant de y, et que ses composantes peuvent s'écrire dans la base (x, y, z)

$$\tau_{ij} = -\rho u_\tau^2 \begin{pmatrix} 4.4 & -1 & 0 \\ -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.2 \end{pmatrix}$$

4. Justifier pourquoi certaines composantes de τ_{ij} sont nulles. Pourquoi a-t-on $\tau_{xy} > 0$ ici ?
5. A partir de la décomposition de Reynolds, montrer que l'on a d'une manière générale

$$k_{tot} = k_{moy} + k_{turb}.$$

6. A partir de l'expression de τ_{ij}, calculer k_{turb} en fonction de u_τ. Pour quelle distance à la paroi y/δ_v a-t-on $k_{moy} = k_{turb}$? Laquelle de ces deux énergies cinétiques domine dans la sous-couche inertielle ?
7. Calculer P en fonction de u_τ, κ et y. Que pensez-vous du comportement de P pour $y \to 0$? et pour $y \gg \delta$? Tracer son allure en fonction de y. Justifier que P doit être maximal à la transition entre les sous-couches inertielle et visqueuse, et exprimer ce maximum en fonction de u_τ, ν et κ.
8. Dans le cadre du modèle de viscosité turbulente, on suppose que l'on a
$$\tau_{ij} = \rho \nu_T \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right),$$
avec $\nu_T(y) = u_\tau \ell_m(y)$ le coefficient de viscosité turbulente, où $\ell_m(y)$ est la longueur de mélange. A partir de l'expression de τ_{xy}, identifier ce que vaut $\ell_m(y)$ dans ce problème. Quelle est l'interprétation physique de cette quantité ?

II. Le panache thermique axisymétrique

On considère une plaque plane horizontale placée dans de l'air au repos à la température T_∞. Une résistance chauffante circulaire de diamètre d et de température $T_0 > T_\infty$ est installée sur cette plaque plane. Au voisinage de cette résistance, le fluide s'échauffe et se dilate, formant un panache thermique qui se développe dans l'air au repos (fig. 1). On suppose que le panache est stationnaire en moyenne (il peut exister des fluctuations turbulentes autour de cette moyenne). On note ρ_∞ la densité de l'air au repos (à la température T_∞).
Le panache est axisymétrique et les composantes de la vitesse sont (u_r,0,u_z) en coordonnées cylindriques. On note $\Delta T = T_0 - T_\infty$ et $\theta(r,z) = T(r,z) - T_\infty$ la différence de température en chaque point du fluide. On note ν la viscosité cinématique de l'air et κ la diffusivité thermique de l'air (en m^2 s^{-1}).
Dans toute la suite, on se place à grande distance de la source de chaleur ($z \gg d$). Dans cette région, le profil de vitesse garde la même forme, dite "auto-similaire",
$$u_z(r,z) = W_0(z) f(\xi),$$
où $W_0(z) = u_z(0,z)$ est la vitesse au centre du panache, et $f(\xi)$ est une fonction sans dimension de la coordonnée radiale réduite $\xi = r/\delta(z)$, avec $\delta(z)$ la largeur locale du panache définie telle que : $u_z(r = \delta(z), z) = \frac{1}{2} W_0(z)$. On a par construction $f(0) = 1$ et $f(1) = 1/2$.
On cherche, de même, une solution autosimilaire pour le profil de température de la forme
$$\theta(r,z) = \theta_0(z) h(\xi),$$
où $\theta_0(z) = \theta(0,z)$ est la différence de température au centre du panache. On suppose en outre que les fonctions $f(\xi)$ et $h(\xi)$ décroissent vers 0 lorsque $\xi \to \infty$ plus vite que $1/\xi^2$, et l'on pose pour $n \geq 1$
$$I_n = \int_0^\infty f(\xi)^n \, \xi \, d\xi \quad ; \quad J_n = \int_0^\infty h(\xi)^n \, \xi \, d\xi.$$
On rappelle l'expression du théorème de transport de Reynolds pour la variation d'une quantité $A(\vec{r},t)$ quelconque (A peut être un scalaire ou une composante d'un vecteur) dans un volume de contrôle $\mathcal{V}$ délimité par une surface matérielle $\mathcal{S}$:
$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} A(\vec{r},t)\, d^3r = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} A(\vec{r},t)\, d^3r + \iint_{\mathcal{S}} A(\vec{r},t)\, \vec{v} \cdot d^2\vec{S}. \quad (1)$$

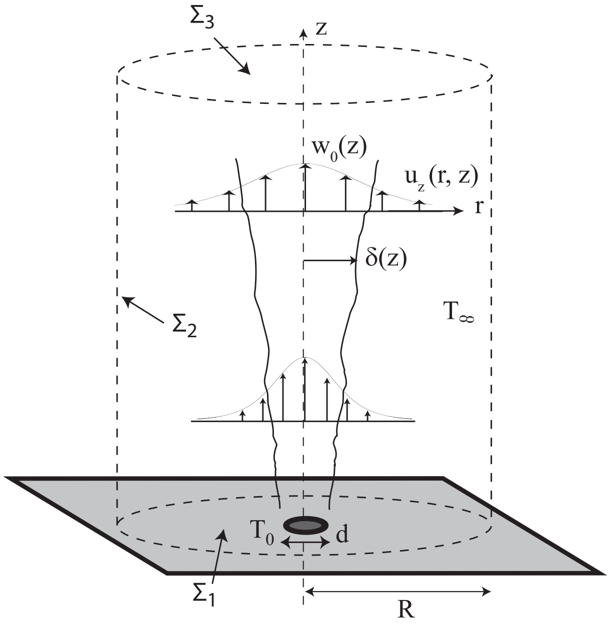

FIGURE 1 – Panache thermique axisymétrique.

1. Donner les valeurs de $h(\xi)$ pour $\xi = 0$, $\xi \to \infty$. Dessiner l'allure de $h(\xi)$.
2. On considère le volume de contrôle cylindrique $\mathcal{V}$ représenté sur la figure : la face d'entrée Σ_1 en $z = 0$ est dans le fluide en contact avec la plaque, la face latérale Σ_2 est cylindrique, de rayon R grand devant la largeur du panache, et la face de sortie Σ_3 est à une altitude z quelconque.
   Que pensez-vous intuitivement du débit sur la surface latérale Σ_2 ?
3. Les variations de température sont supposées suffisamment faibles ($\alpha\Delta T \sim 10^{-3} \ll 1$) de sorte que l'on peut considérer ν et κ comme constantes et la variation de densité comme nulle exceptée dans l'expression de la poussée d'Archimède (force par unité de volume), $\vec{\Pi} = -\Delta\rho(r,z)\ g\ \vec{e_z} = \rho_\infty \alpha\theta(r,z)\ g\ \vec{e_z}$, qui est moteur de l'écoulement ici. **On pourra admettre les résultats de la question 3 et passer à la suite le cas échéant.**
   a) Faire un bilan des forces extérieures $\vec{F}_{ext}$ s'exerçant sur le fluide contenu dans le volume de contrôle $\mathcal{V}$. Pour simplifier le problème, on supposera que (i) la pression est constante partout, et que (ii) les contraintes visqueuses sont négligeables.
   Exprimer $\vec{F}_{ext}$ en fonction de $\theta_0(z)$, $\delta(z)$ et des constantes du problème.
   b) A partir du théorème de transport (1) appliqué à la densité de quantité de mouvement $\rho_\infty \vec{v}(\vec{r},t)$, montrer que
   $$\frac{d}{dt}\vec{P} = 2\pi\rho_\infty I_2 [W_0(z)]^2 [\delta(z)]^2\, \vec{e}_z,$$
   où $\vec{P} = \iiint_{VC} \rho_\infty \vec{v} d^3\vec{r}$ est la quantité de mouvement totale du volume de contrôle. On prendra soin de bien détailler les termes de flux sur chacune des surfaces $\Sigma_{1,2,3}$. On pourra supposer que $u_r(r,z)u_z(r,z)$ décroît vers zéro plus vite que $1/r^2$ lorsque $r \to \infty$.
   c) En déduire, à l'aide de la relation fondamentale de la dynamique, que $\theta_0(z)$, $\delta(z)$ et $W_0(z)$ vérifient la relation
   $$\frac{\int_0^z \theta_0(z)\delta^2(z)dz}{W_0^2(z)\delta^2(z)} = \frac{I_2}{\alpha g J_1}. \qquad (2)$$

3. On cherche des solutions de $\delta(z)$, $W_0(z)$ et $\theta_0(z)$ en lois de puissance de z telles que

$$\delta \propto z^b \; ; \; W_0 \propto z^p \; ; \; \theta_0 \propto z^q.$$

   Montrer que les exposants p et q sont reliés par l'expression $2p = 1 + q$. Si la vitesse décroît comme $W_0(z) \propto z^{-1/3}$, comment varie $\theta_0(z)$?

4. On admet que $\delta(z) \propto z$. Exprimer le débit volumique $Q(z)$ à travers Σ_3 (pour $R \to \infty$). Interpréter physiquement l'augmentation du débit avec z, et tracer l'allure des lignes de courant.

5. Expliquer ce que représentent physiquement les composantes des tenseurs de Reynolds suivants :

$$\tau_{rz} = -\rho_\infty \overline{u'_r u'_z}, \qquad \Phi_r = -\overline{u'_r \theta'}$$

   (les primes désignent les fluctuations turbulentes). Discuter la valeur ainsi que le signe de ces quantités en $r = 0$, en $r \simeq \delta(z)$ et en $r \gg \delta(z)$. En déduire l'allure des profils de τ_{rz} et de Φ_r en fonction de r à z fixé.

6. Par analogie avec le modèle de viscosité turbulente, qui permet d'exprimer τ_{rz} en fonction de la contrainte visqueuse $\sigma'_{rz} \simeq \eta \partial u_z / \partial r$, comment écririez-vous un modèle de diffusivité turbulente pour la température ?