Université Paris-Sud **Année 2011-12**
Master 1 de Physique Appliquée et Mécanique

Examen de Turbulence

Jeudi 29 Mars 2012

Durée : 3 heures - sans document

Exercice 1 : Champ de pression d'un écoulement turbulent

On rappelle l'équation de Reynolds :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\overline{u_i} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i} - \overline{u_i' u_j'}\right),$$

où $\overline{u_i}$ désigne la vitesse moyenne et u_i' la fluctuation (avec $u_i = \overline{u_i} + u_i'$ et $\overline{u_i'} = 0$).

1. En prenant la divergence de l'équation de Reynolds, montrez que le Laplacien du champ de pression moyen vérifie la relation :

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial x_i^2} = \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{1}$$

2. On se restreint à un écoulement bi-dimensionnel, et l'on note (u_x, u_y) les composantes de la vitesse selon (x, y). Réécrire l'équation (1) en explicitant les sommes sur x et z.

3. On considère un écoulement moyen de cisaillement homogène, donné par $\overline{u_x}(x, y) = Sy$, avec S une constante. Les fluctuations turbulentes sont supposées homogènes dans tout l'espace. Que devient l'équation (1) ? En déduire le champ de pression moyen $\overline{p}(x, y)$.

4. On considère maintenant un écoulement moyen de rotation solide, donné par $\overline{\vec{u}}(\vec{r}, t) = \vec{r}_{\wedge}[\Omega(t)\vec{e}_z]$. Là encore, les fluctuations turbulentes sont supposées homogènes dans tout l'espace. Que devient l'équation (1) ? Que pensez-vous (qualitativement) du champ de pression ?

Exercice 2 : Dispersion de polluants dans l'atmosphère

On cherche à étudier la dispersion de polluants dans l'atmosphère à la sortie d'une cheminée d'usine. Pour cela, on considère un jet d'air turbulent chargé en particules (voir Fig. 1) se développant dans de l'air au repos. Soit $C(x, y, z, t)$ la concentration de polluants dans le jet turbulent. L'équation d'advection-diffusion de la concentration est donnée par

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_i\,\frac{\partial C}{\partial x_i} = D\,\frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2}, \tag{2}$$

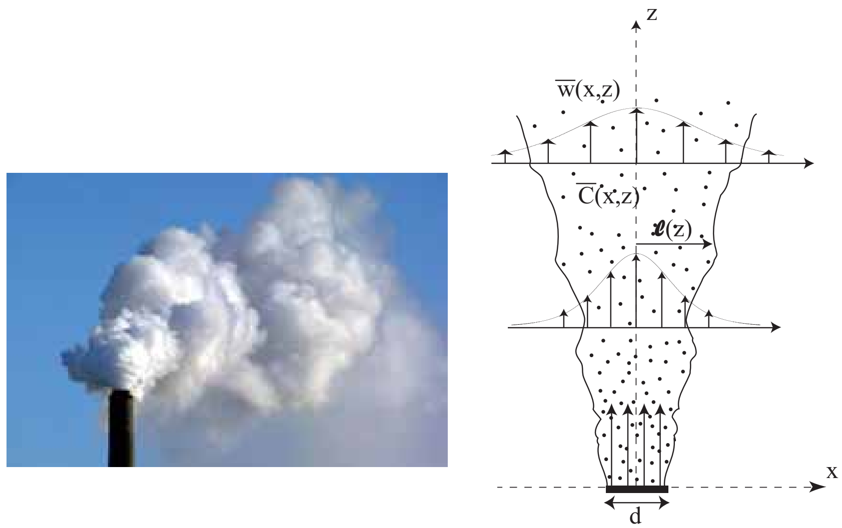

Figure 1: Développement d'un jet turbulent chargé en particules dans un contexte industriel. Schématisation du problème avec des profils de vitesse dans la partie autosimilaire. La concentration en polluants dans le jet est donnée par $C(x, z)$.

où D est le coefficient de diffusion particulaire (en m^2/s).

On suppose dans ce problème que l'écoulement est statistiquement stationnaire. De plus, la largeur de la cheminée étant très petite devant sa profondeur Δy (normal au plan de la figure), on considère l'écoulement comme étant statistiquement bidimensionnel. On note (u,w) les composantes de la vitesse selon (x,z), avec x la direction transverse et z la direction longitudinale (l'origine $z = 0$ étant prise au niveau de la sortie de cheminée). On note ℓ l'échelle de longueur caractéristique selon x et L celle selon z, avec $\ell \ll L$. On note $W_0(z) = \overline{w}(0, z)$ et $C_0(z) = \overline{C}(0, z)$ respectivement la vitesse ascendante et la concentration au centre du jet. On note $\mathcal{W}$ l'ordre de grandeur de la vitesse moyenne axiale $\overline{w}$, $\mathcal{U}$ celle de la vitesse latérale $\overline{u}$ et u^* l'ordre de grandeur des fluctuations turbulentes, que nous supposerons isotropes (c'est-à-dire telles que $\overline{u'^2} \simeq \overline{w'^2} \simeq \overline{u'w'} \simeq u^{*2}$). Enfin, on note $\mathcal{C}$ l'ordre de grandeur de la concentration moyenne en particules $\overline{C}$ et c^* l'ordre de grandeur des fluctuations de concentration C'.

1. A partir de l'équation d'incompressibilité, exprimer l'ordre de grandeur de la vitesse latérale $\mathcal{U}$ en fonction de $\mathcal{W}$, L et ℓ.

2. (a) En introduisant dans l'équation (2) la décomposition de Reynolds pour la vitesse et la concentration, montrer que l'équation pour $\overline{C}$ s'écrit en régime statistiquement stationnaire :

$$\overline{u_i}\,\frac{\partial \overline{C}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}\,\overline{u_i' C'} = D\,\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x_i^2}.$$

(b) Evaluer les ordres de grandeur des différents termes de cette équation. Montrer que les termes de diffusion sont négligeables devant les termes de transport turbulent si

$$\frac{u^*\ell}{D} \gg \frac{\mathcal{C}}{c^*}.$$

Comment s'appelle le nombre sans dimension $u^*\ell/D$ et à quoi correspond t'il ? Que pensez-vous des 2 termes de cette inégalité dans la situation correspondant à la photographie de la Fig. 1 ?

(c) En déduire que l'équation de la concentration moyenne se réduit alors à :

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{C}}{\partial x} + \overline{w}\frac{\partial \overline{C}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\overline{u'C'} = 0. \tag{3}$$

3. On s'intéresse à la région autosimilaire du jet. A suffisamment grande distance en aval, le jet s'élargit mais les profils de vitesse et de concentration gardent la même forme. L'autosimilarité permet d'écrire le profil moyen sous forme adimensionnée :

$$\begin{aligned}\overline{w} &= W_0(z)\ f(\xi)\\ \overline{C} &= C_0(z)\ g(\xi)\\ -\overline{u'C'} &= W_0(z)C_0(z)\ h(\xi)\end{aligned}$$

où l'on a posé la coordonnée réduite $\xi = x/\ell(z)$, où $\ell(z)$ est la largeur à mi-hauteur définie telle que $\overline{w}(l(z), z) = \frac{1}{2}\overline{w}(0, z)$. f est une fonction paire (cf. fig. 1) avec $f(0) = 1$ par construction.

(a) Tracer l'allure des fonction $g(\xi)$ et $h(\xi)$.

(b) Exprimer les dérivées partielles $\partial/\partial x$ et $\partial/\partial z$ en fonction de $\ell(z)$, $d\ell/dz$, ξ et $\partial/\partial\xi$.

(c) A partir de l'équation de continuité, montrer que la vitesse moyenne latérale peut elle aussi s'exprimer de façon autosimilaire :

$$\overline{u} = -\ell \int_0^{\xi} \left(\frac{dW_0}{dz}\ f - \frac{W_0}{\ell}\ \frac{d\ell}{dz}\ \xi f' \right) d\xi$$

Que pensez-vous de la parité de $\overline{u}$? Tracer son allure.

(d) En substituant les profils autosimilaires dans l'équation de la concentration moyenne (3), montrer que :

$$-\frac{\ell}{W_0}\frac{dW_0}{dz}g'\int_0^{\xi} f d\xi + \frac{d\ell}{dz}g'\int_0^{\xi}\xi f' d\xi + \frac{\ell}{C_0}\frac{dC_0}{dz}fg - \frac{d\ell}{dz}\xi f g' + h' = 0, \tag{4}$$

où les primes désignent les dérivées par rapport à ξ. On pourra admettre cette équation et passer à la suite.

4. Pour trouver une solution autosimilaire, les préfacteurs de l'équation (4) doivent être constants :

$$\frac{\ell}{W_0}\frac{dW_0}{dz} = cste \quad ; \quad \frac{\ell}{C_0}\frac{dC_0}{dz} = cste \quad ; \quad \frac{d\ell}{dz} = cste$$

   (a) Trouver la loi de variation de $\ell(z)$ en fonction de z.

   (b) Par une analyse en ordre de grandeur, on peut montrer que l'équation de Reynolds projetée selon la direction du mouvement se réduit, comme pour le problème classique du jet plan turbulent, à

$$\frac{\partial \overline{u}\overline{w}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w}^2}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\overline{u'w'} = 0. \tag{5}$$

   En intégrant l'équation (5) par rapport à x, montrer que le flux de quantité de mouvement selon z (par unité de profondeur)

$$\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \overline{w}^2 dx$$

   est indépendant de l'altitude z. En écrivant la vitesse axiale $\overline{w}$ sous sa forme autosimilaire, en déduire la loi de variation de W_0 avec z.

   (c) Intégrer l'équation de la concentration moyenne (3) par rapport à x entre $-\infty$ et $+\infty$ et montrer que le flux de concentration selon z,

$$\phi_C = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{w}\overline{C} \; dx,$$

   est une constante indépendante de l'altitude z.

   En utilisant les profils autosimilaire de la vitesse et de la concentration, montrer que

$$\ell(z) \; W_0(z) \; C_0(z) = cste. \tag{6}$$

   En déduire la loi de variation de la concentration C_0 avec z.

5. On rappelle que dans le cadre du modèle de viscosité turbulente, on modélise le tenseur de contrainte turbulente $\tau_{xz} = -\rho\overline{u'w'}$ sous la forme :

$$\tau_{xz} = \rho \nu_T \frac{\partial \overline{w}}{\partial x},$$

   où ν_T est le coefficient de viscosité turbulente (on a négligé ici la contribution $\partial\overline{u}/\partial z$ de la déformation moyenne).

   (a) Par analogie avec le modèle de viscosité turbulente, proposer une modélisation pour le flux de concentration turbulent $-\overline{u'C'}$, en introduisant un coefficient de diffusivité turbulente D_T (en $\mathrm{m^2 s^{-1}}$).

(b) Montrer, à partir de cette équation, que l'autosimilarité de $\overline{u'C'}$ permet d'exprimer la fonction $h(\xi)$ en fonction d'une dérivée de $g(\xi)$.

(c) En introduisant la relation qui relie $h(\xi)$ en fonction d'une dérivée de $g(\xi)$ et en utilisant la relation (6), montrer que l'équation adimensionnée de la concentration moyenne (4) peut se réduire à :

$$\left(\frac{d\ell}{dz} + \frac{\ell}{W_0}\,\frac{dW_0}{dz}\right) g \int_0^{\xi} f d\xi = -\frac{D_T}{W_0 \ell} g'.$$

(d) Montrer que la solution est de la forme

$$g(\xi) = B\ \exp\left[-\int_0^{\xi} F(\xi) d\xi\right],$$

où $F(\xi) = \int_0^{\xi} f(\xi) d\xi$.
En déduire la forme de $g(\xi)$ si on fait l'approximation $f(\xi) \simeq 1$. Où cette approximation est-elle valide ?