

## Examen de Turbulence

Jeudi 31 Mars 2011

Durée : 3 heures - sans document

### Exercice 1 : Sillage d'un objet propulsé

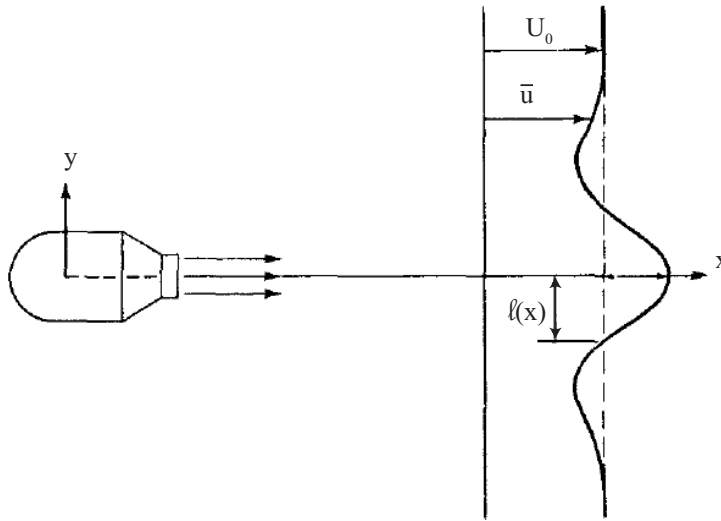


Figure 1: Sillage bi-dimensionnel d'un objet propulsé, montrant un profil de vitesse non monotone en aval de l'objet.

Un objet propulsé, comme un avion ou un sous-marin, avance grâce à l'action d'une source d'énergie intérieure, donnant lieu à une force appelée "poussée". Lorsque cet objet propulsé avance à vitesse constante, la poussée est exactement compensée par la force de traînée. Le sillage d'un tel objet propulsé diffère notablement de celui d'un objet passif, comme une balle de tennis, qui ne possède pas de source d'énergie intérieure. Dans le cas d'un objet propulsé, on peut montrer en particulier que le profil de vitesse moyen est non monotone (figure 1). L'objectif de ce problème est de caractériser ce sillage.

On considère pour simplifier un objet propulsé bi-dimensionnel, invariant selon la direction  $z$ , et on étudie son sillage turbulent dans le plan  $(x, y)$ . L'objet se déplace vers la gauche à vitesse constante  $-U_0$ . On se place dans le référentiel de l'objet, de sorte qu'il existe un écoulement uniforme  $U_0 > 0$  loin de l'objet. On note  $(u, v)$  la vitesse du fluide selon  $(x, y)$ , avec  $x = 0$  à l'arrière de l'objet. Le nombre de Reynolds est supposé très grand, et l'on se place loin de l'objet ( $x$  grand), de sorte que l'effet de la viscosité peut être négligé ici. On note  $l(x)$  la largeur caractéristique du sillage à la distance  $x$ , et l'on suppose  $l(x) \ll x$ . On s'intéresse au défaut de vitesse  $\tilde{u}(x, y) = U_0 - \bar{u}(x, y)$  dans le sillage. On note  $U_s(x) = \tilde{u}(x, 0)$

le défaut de vitesse au centre, et l'on suppose  $U_s \ll U_0$ . Contrairement au sillage d'un objet passif, il n'y a pas de débit associé au défaut de vitesse dans le cas de l'objet propulsé, et l'on a donc :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(x, y) dy = 0.$$

1. A partir du profil de vitesse moyen de la figure 1, indiquer pour quelles valeurs de  $y$  la contrainte visqueuse change de signe. Que pensez-vous de la contrainte turbulente en  $y = 0$  ?
2. On rappelle l'équation de Reynolds pour la vitesse moyenne  $\overline{u_i}$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_j} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j^2}. \quad (1)$$

Ecrire les projections selon  $x$  et  $y$  de cette équation.

3. Expliquer, en quelques lignes de justification, pourquoi l'équation de Reynolds selon  $x$  peut se simplifier sous la forme :

$$U_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}. \quad (2)$$

On pourra admettre ce résultat pour la suite.

4. On utilise un modèle de viscosité turbulente pour le tenseur de Reynolds :

$$-\overline{u'v'} = \nu_T(x) \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}. \quad (3)$$

Que pensez-vous du choix  $\nu_T(x)$  indépendant de  $y$  ?

5. En multipliant l'équation (2) par  $y^2$  et en intégrant, montrer que l'intégrale

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \tilde{u}(x, y) dy \quad (4)$$

est indépendante de  $x$  (on supposera que  $\tilde{u}$  tend vers 0 plus vite que  $1/|y|^2$  pour  $|y| \rightarrow \infty$ ).

6. On admet dans la suite que le sillage est autosimilaire, et l'on pose

$$\tilde{u}(x, y) = U_s(x) f(\zeta) \quad (5)$$

avec  $\zeta = y/\ell(x)$  la coordonnée réduite transverse. En exprimant l'intégrale  $I_0$  à partir de ce profil autosimilaire, en déduire que l'on a

$$U_s(x) \ell(x)^3 = J_0, \quad (6)$$

où l'on exprimera  $J_0$  en fonction de  $I_0$  et d'une intégrale sans dimension.

7. Justifier physiquement que le coefficient de viscosité turbulente puisse être pris sous la forme

$$\nu_T(x) = \mu \ell(x) U_s(x),$$

où  $\mu$  est une constante de l'ordre de 1.

8. Exprimer les dérivées partielles  $\partial/\partial x$  et  $\partial/\partial y$  en fonction de  $\partial/\partial \zeta$ ,  $\zeta$ ,  $\ell(x)$  et  $d\ell/dx$ . Afin de déterminer les variations de  $U_s(x)$  et  $\ell(x)$  en fonction de  $x$ , on introduit le profil auto-similaire (5) dans l'équation de Reynolds (2). Montrer, en vous aidant de (6), que l'on obtient alors

$$\frac{1}{U_s(x)} \frac{d\ell}{dx} = cste. \quad (7)$$

9. Les 2 lois de conservations mises en évidence permettent d'écrire  $U_s(x)$  et  $\ell(x)$  sous la forme

$$U_s(x) \propto x^n, \quad \ell(x) \propto x^m. \quad (8)$$

En déduire les valeurs des exposants  $n$  et  $m$ . Dessiner l'allure de l'évolution de la largeur du sillage. En raisonnant sur le nombre de Reynolds turbulent  $Re_T(x) = U_s(x)\ell(x)/\nu$ , que pensez-vous du sillage lointain ?

## Exercice 2 : Écoulement turbulent dans un tuyau cylindrique

On considère un écoulement d'eau dans une portion de tube circulaire d'axe  $Ox$ , de rayon  $R = 5$  cm et de longueur  $L = 20$  m (figure 2). Une différence de pression de  $\Delta p = 2 \cdot 10^5$  Pa est imposée entre l'entrée et la sortie du tube, et l'on cherche à calculer le débit dans le tube. On néglige les effets d'établissement du profil de vitesse à l'entrée du tube ( $L \gg$  longueur d'entrée). On donne la densité de l'eau,  $\rho = 1000$  kg m<sup>-3</sup>, et la viscosité cinématique,  $\nu = 10^{-6}$  m<sup>2</sup>s<sup>-1</sup>.

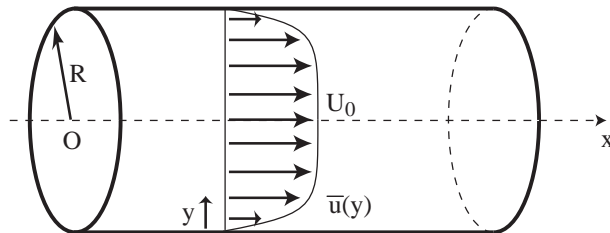


Figure 2: Profil de vitesse moyen d'un écoulement turbulent dans un tube.

1. En faisant un bilan des forces s'exerçant sur les sections d'entrée et de sortie et sur la paroi latérale du tube, calculer la contrainte pariétale  $\tau_0$ .
2. Rappeler l'expression de la vitesse de friction  $u^*$  en fonction de  $\tau_0$ . Calculer  $u^*$ , et en déduire le nombre de Reynolds turbulent  $Re^* = u^*R/\nu$ , ainsi que l'épaisseur de la sous-couche visqueuse  $\delta_v$  (faire les applications numériques).
3. Rappeler (en quelques lignes) la signification physique des notions de sous-couche visqueuse et de sous-couche inertielle, en particulier du point de vue des mécanismes de transport de quantité de mouvement.

Dans l'approximation d'une sous-couche visqueuse très fine comparée au rayon  $R$  du tube, on peut approximer l'écoulement près de la paroi à celui d'une couche limite au-dessus d'une plaque plane. On note  $y = R - r$  la distance à la paroi et  $U_0$  la vitesse au centre du tube. On rappelle les deux expressions du profil de vitesse moyen dans la sous-couche inertielle ( $\delta_v \ll y \ll R$ ) :

$$\frac{\bar{u}(y)}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{\delta_v} + C \quad (\text{a}) \quad \text{et} \quad \frac{\bar{u}(y) - U_0}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{R} + C' \quad (\text{b}). \quad (9)$$

Les valeurs expérimentales des constantes sont  $1/\kappa \simeq 2,5$  (constante de von Kármán),  $C \simeq 5$  et  $C' \simeq 0$ .

4. En admettant que la loi (9b) reste approximativement valable sur toute la section du tube, montrer que le débit volumique vaut :

$$Q = \pi R^2 \left( U_0 - \frac{3}{2} \frac{u^*}{\kappa} \right).$$

On pourra utiliser les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \ln x \, dx = -1 \quad \text{et} \quad \int_0^1 x \ln x \, dx = -1/4.$$

5. A partir des deux lois (9a) et (9b), exprimer la vitesse au centre  $U_0$  en fonction de  $u^*$ , du nombre de Reynolds  $Re^*$ , ainsi que des constantes sans dimension. Calculer les valeurs numériques de  $U_0$  et de  $Q$ .
6. En déduire que le débit  $Q$  peut s'écrire sous la forme

$$Q = \pi R^2 U_0 f(Re^*)$$

où  $f(Re^*)$  est une fonction sans dimension dépendant de  $Re^*$  uniquement. Tracer l'allure de cette fonction, en discuter physiquement la limite  $Re^* \rightarrow \infty$ . Que pensez-vous de  $\tau_0$  dans cette limite ?