

Examen de Turbulence et modélisation

Vendredi 2 Mai 2003 – correction

Exercice 1 : Dispersion d'un polluant

On remplace dans l'équation de diffusion-advection les décompositions de Reynolds $u = \bar{u} + u'$ et $C = \bar{C} + C'$, on moyenne et (en utilisant l'incompressibilité $\partial \bar{u}_i / \partial x_i = 0$) on obtient l'équation demandée (cf. exercice 1 du TD 1).

Le second membre contient deux termes de flux. Le premier est turbulent, d'ordre de grandeur $u' C'$, et le second diffusif, d'ordre de grandeur $D \bar{C} / L$. Le rapport de ces deux termes est

$$\frac{u' L C'}{D \bar{C}}.$$

Dans un écoulement atmosphérique, le terme turbulent domine évidemment très largement le terme diffusif.

Exercice 2 : Longueur d'entrée

- a) Cas laminaire : $\delta(x) \simeq \sqrt{\nu x / U}$. Cas turbulent : $\delta(x) \simeq x u' / U$ (cf. TD 2).
- b) La longueur d'entrée L vérifie $2\delta(x = L) = h$. On a donc dans le cas laminaire $L/h \propto \text{Re}$ (soit $n = 1$) et dans le cas turbulent $L/h = \text{cste}$ (soit $n = 0$). L/h croît linéairement jusqu'à $\text{Re}_c \simeq 2000$, puis sature pour $\text{Re} > 2000$ (la valeur de saturation dépend de U/u' , qui est supposée indépendante du nombre de Reynolds).

Problème : L'écoulement de Couette turbulent

- 1.a) Avec $\partial / \partial t = 0$ et $\partial / \partial x = 0$, l'équation de Reynolds selon x se réduit à :

$$0 = \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bar{u}_x - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'_x u'_y}. \quad (1)$$

La contrainte totale $\tau_{xy} / \rho = \nu \partial \bar{u}_x / \partial y - \overline{u'_x u'_y}$ est donc constante dans tout l'écoulement.

- 1.b) En remplaçant $\bar{u}_x(y) = U_0 y / h$ dans l'équation précédente, on a $\overline{u'_x u'_y} = \text{cste}$. Les fluctuations étant nulles en paroi, cette constante est nulle. Il n'y a donc aucune contrainte turbulente dans l'écoulement, la contrainte totale est purement visqueuse. L'écoulement est donc nécessairement laminaire, le profil linéaire de vitesse est incompatible avec un écoulement turbulent (on peut montrer d'une manière générale que ce profil de vitesse est stable vis-à-vis de perturbations infinitésimales à tous nombres de Reynolds).
2. En remplaçant $\bar{u}_x(y) = U_0 f(\xi)$ et $\overline{u'_x u'_y} = U_0^2 g(\xi)$ dans (1), avec $\partial / \partial \xi = h \partial / \partial y$, on obtient $f'' = \text{Re } g'$. $f(\xi)$ est impaire, avec $f(0) = 0$ et $f(\pm 1) = \pm 1$. Donc f'' est également impaire, g' est impaire, d'où g paire. Les fluctuations étant nulles en paroi, on a $g(\pm 1) = 0$, et $g(0) \neq 0$.
- 3.a) La viscosité turbulente $\nu_T(y)$ s'exprime en m^2/s , et représente le transport de quantité de mouvement par les fluctuations turbulentes, par analogie avec la viscosité vraie qui représente le transport de quantité de mouvement par agitation thermique (origine microscopique de la diffusion visqueuse). Le choix $\nu_T = \text{cste}$ signifierait qu'il existe un transport turbulent dans tout l'écoulement, ce qui n'est pas réaliste puisque les fluctuations doivent s'annuler à la paroi. De plus, en remplaçant $\nu_T = \text{cste}$ dans (1) on aurait $0 = (\nu + \nu_T) \partial^2 \bar{u}_x / \partial y^2$,

soit $\overline{u}_x$ variant linéairement avec y , et l'on retrouverait simplement le profil linéaire du cas laminaire et l'absence de fluctuations dans tout l'écoulement. Un modèle plus fin qu'une simple viscosité turbulente constante est donc nécessaire ici.

- 3.b) ℓ représente la taille des tourbillons les plus efficaces pour transférer la quantité de mouvement, c'est-à-dire les tourbillons les plus gros possibles. A une distance Y de la paroi, il ne peut pas y avoir de tourbillons de taille supérieure à Y . Donc $\ell \simeq Y = h - |y|$.

En remplaçant, on obtient (pour $y > 0$) :

$$-\overline{u'_x u'_y} = \alpha(h - y)U_0 \frac{\partial \overline{u}_x}{\partial y}$$

$$-U_0^2 g(\xi) = \alpha(1 - \xi)U_0^2 f'(\xi).$$

En dérivant et en utilisant $f'' = \text{Re } g'$, on obtient

$$f''(1 + (\alpha \text{Re})^{-1} - \xi) = f',$$

d'où l'équation demandée avec $\phi(\xi) = f'(\xi)$.

- 3.c) En séparant les variables et en intégrant, on a

$$\int \frac{d\phi}{\phi} = \int \frac{d\xi}{(1 + (\alpha \text{Re})^{-1} - \xi)}.$$

Avec le changement de variable proposé, $d\xi = dZ(1 + (\alpha \text{Re})^{-1})$, on obtient :

$$\int \frac{d\phi}{\phi} = - \int \frac{-dZ}{1 - Z},$$

que l'on peut intégrer :

$$\begin{aligned} \ln \phi &= -\ln(1 - Z) + c_1, & \phi(Z) &= \frac{c_2}{1 - Z} \\ f(Z) &= \int \phi(Z') dZ' = -c_2 \ln(1 - Z) + c_3 \end{aligned}$$

où c_1, c_2, c_3 sont des constantes d'intégration. Les conditions aux limites $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ permettent d'identifier $c_3 = 0$ et $c_2 = -1/\ln(1 - 1/(1 + (\alpha \text{Re})^{-1}))$, et on obtient enfin :

$$f(\xi) = \frac{\ln\left(1 - \frac{\xi}{1 + (\alpha \text{Re})^{-1}}\right)}{\ln\left(1 - \frac{1}{1 + (\alpha \text{Re})^{-1}}\right)},$$

soit après simplification,

$$f(\xi) = 1 - \frac{\ln(1 + \alpha \text{Re}(1 - \xi))}{\ln(1 + \alpha \text{Re})}. \quad (2)$$

Un développement pour $\alpha \text{Re} \ll 1$ donne (avec $\ln(1 + x) \simeq x$) $f(\xi) = \xi$, qui est bien le profil de Couette laminaire. La limite $\text{Re} \rightarrow \infty$ correspond à $f(\xi) = 0$ pour $|\xi| < 1$ et $f(1) = 1$, avec une discontinuité en $y = h$. Cet écoulement correspond à celui d'un fluide parfait (sans viscosité) ; cette approximation du fluide parfait n'a de sens que loin des parois, d'où la discontinuité en $y = h$.

- 3.d) On a $g = \text{Re}^{-1} f' + a = \text{Re}^{-1} \phi + a$, avec a tel que $g(1) = 0$. $g(\xi)$ est toujours négative (c'est lié au fait que la contrainte de Reynolds, $-\overline{u'_x u'_y} = -U_0^2 g(\xi)$, est toujours du même signe que la contrainte visqueuse, $\nu U_0 f'(\xi)/h$, qui est positive car f est croissante). Son expression exacte,

$$g(\xi) = -\frac{\alpha}{\ln(1 + \alpha \text{Re})} \left(1 - \frac{1}{1 + \alpha \text{Re}(1 - \xi)}\right)$$

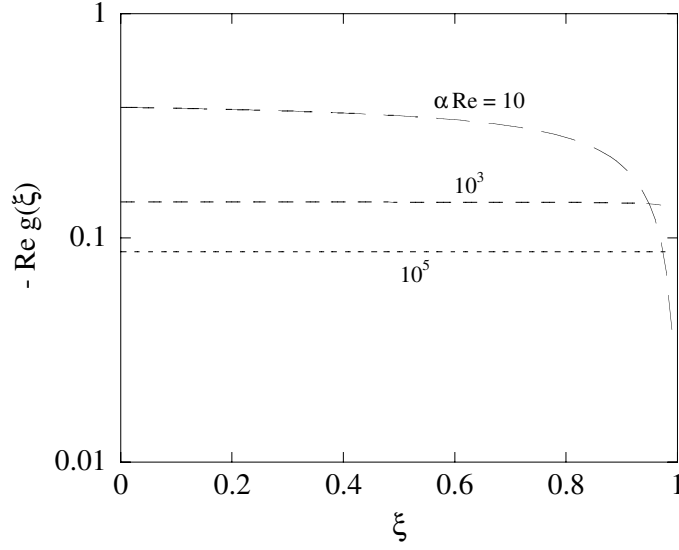


Figure 1: Profils de contrainte turbulente adimensionnée pour différentes valeurs de αRe .

(qui n'était pas demandée), est tracée en figure 1.

La contrainte turbulente $g(\xi)$ est nulle en paroi et pratiquement constante dans toute la partie centrale de l'écoulement. Puisque contrainte visqueuse + contrainte turbulente = cste, la contrainte visqueuse adimensionnée est $g(0) - g(\xi)$; elle est presque nulle partout sauf très près des parois.

4. Avec $\tau_{xy} = \eta \partial \bar{u}_x / \partial y (y = h) = \eta U_0 / h$, on obtient $C_f = 2/\text{Re}$. Une telle décroissance avec Re est caractéristique des écoulements laminaires.

Dans le cas turbulent, on a $\tau_{xy} = \eta \partial \bar{u}_x / \partial y (y = h) = \rho \nu U_0 f'(1)/h$, soit $C_f = 2f'(1)/\text{Re}$. Avec $f'(1) = \phi(1)$ obtenu en 3.c, on obtient $C_f = 2\alpha / \ln(1 + \alpha \text{Re})$ (voir la figure 2). Cette dépendance logarithmique en Re est très lente, et correspond à l'idée intuitive d'un coefficient de friction quasiment indépendant de Re en régime turbulent. Dans le cas $\alpha \text{Re} \ll 1$, le développement limité de $\ln(1 + \alpha \text{Re}) \simeq 1 + \alpha \text{Re}$ redonne bien le $C_f = 2/\text{Re}$ du cas laminaire.

5. *Question bonus.* La contrainte à la paroi peut s'écrire $\eta \partial \bar{u}_x / \partial y (y = h) \simeq \eta U_0 / \delta_v$. En utilisant $\tau_{xy} = \frac{1}{2} C_f \rho U_0^2$, on retrouve bien l'expression demandée pour δ_v .

De façon plus rigoureuse, on peut linéariser $f(\xi)$ au voisinage de $\xi \simeq 1$: $f(\xi) \simeq 1 + (\xi - 1)f'(1)$, soit

$$f(\xi) = 1 + (\xi - 1) \frac{\alpha \text{Re}}{\ln(1 + \alpha \text{Re})}.$$

En définissant δ_v tel que $f = 0$ pour $\xi = 1 - \delta_v/h$, on obtient

$$\delta_v/h = \frac{1}{\alpha \text{Re}} \ln(1 + \alpha \text{Re}),$$

qui correspond encore à l'équation demandée.

L'épaisseur de sous-couche visqueuse pour une couche limite turbulente classique s'écrit $\delta_v = \nu/u^*$, où la vitesse de friction u^* est l'échelle caractéristique des fluctuations turbulentes. Par analogie a donc ici $\alpha \simeq u^*/U_0$ (en négligeant la dépendance logarithmique en Re), soit typiquement $\alpha \simeq 0.1$. C'était prévisible : αU_0 a été introduit comme étant la vitesse caractéristique des tourbillons responsables de la diffusion de quantité de mouvement en question 3b.

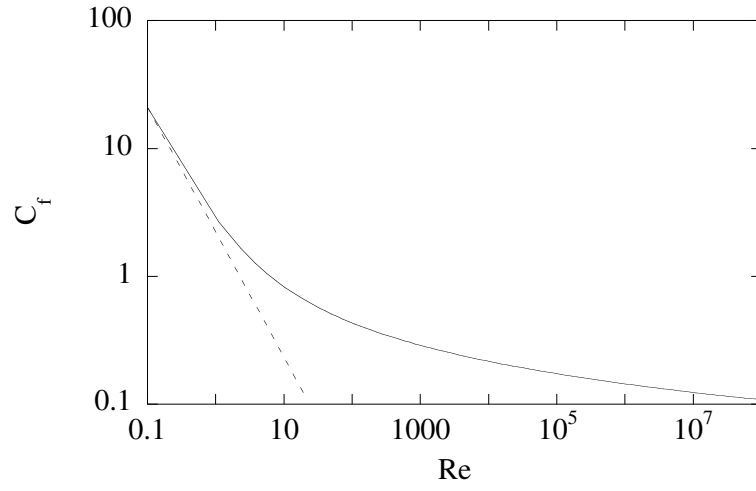


Figure 2: Coefficient de trainée C_f en fonction du nombre de Reynolds, pour une valeur arbitraire $\alpha = 1$. Pour Re allant de 10^4 à 10^8 , C_f varie à peine d'un facteur $1/2$. La ligne pointillée correspond à la limite laminaire $C_f = 2/Re$.

A petit nombre de Reynolds on obtient $\delta_v \rightarrow h$: la couche limite envahit tout l'espace entre les plaques, il n'y a donc plus de couche limite à proprement parler, et on retrouve le profil linéaire de l'écoulement de Couette laminaire.