Maîtrise de mécanique, Paris XI **Année universitaire 2002/03**

Examen de Turbulence et modélisation

Vendredi 2 Mai 2003

Durée : 3 heures - sans document

Exercice 1 : Dispersion d'un polluant

Soit $C(x, y, z, t)$ la concentration d'un polluant dans un écoulement turbulent. L'équation de diffusion-advection de la concentration est

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_i \frac{\partial C}{\partial x_i} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_i}, \qquad (1)$$

où D est la constante de diffusion du polluant. En introduisant les décompositions de Reynolds pour le champ de vitesse et le champ de concentration, montrer que la concentration moyenne vérifie l'équation :

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \overline{v_i} \frac{\partial \overline{C}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\overline{C' v_i'} + D \frac{\partial \overline{C}}{\partial x_i} \right).$$

Parmi les deux contributions du membre de droite, laquelle sera dominante dans un écoulement atmosphérique ?

Exercice 2 : Longueur d'entrée

En sortie d'une chambre de tranquilisation, située en $x < 0$, un fluide pénètre à vitesse moyenne U dans une conduite parallélépipédique en $x > 0$. La dimension transverse (selon z) de cette conduite est supposée très grande devant sa hauteur h (selon y). On peut donc considérer le problème comme invariant selon z, et se restreindre à une étude bidimensionnelle dans le plan xOy.

On appelle *longueur d'entrée* L la distance au-delà de laquelle l'écoulement est *établi*, c'est-à-dire telle que le profil de vitesse devient invariant selon x. Cette longueur d'entrée peut être approximativement définie comme la distance x à laquelle les couches limites sur les plans supérieurs et inférieurs (en $y = 0$ et $y = h$) s'interpénètrent.

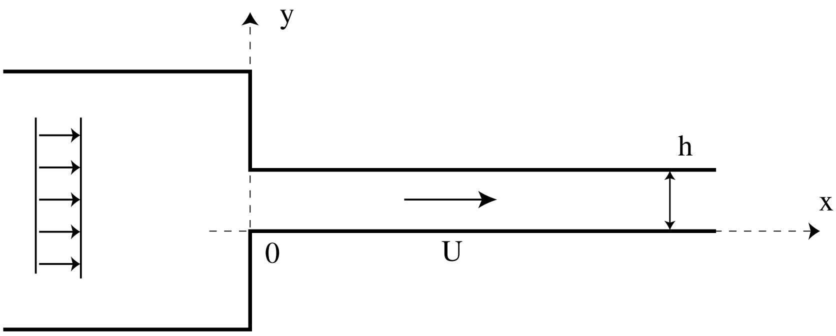

Figure 1: Conduite parallélépipédique en sortie d'une chambre de tranquilisation

a) Retrouver, en raisonnant sur le transport convectif et diffusif de la quantité de mouvement, la loi d'évolution de l'épaisseur de couche limite $\delta(x)$ en fonction de la distance x dans les cas laminaire et turbulent.

b) En déduire que la variation de la longueur d'entrée avec le nombre de Reynolds $\mathrm{Re} = Uh/\nu$ peut s'écrire sous la forme adimensionnée :

$$\frac{L}{h} \propto \mathrm{Re}^n.$$

Déterminer la valeur de l'exposant n dans les cas laminaire et turbulent, et tracer l'allure de la courbe $L/h = f(\mathrm{Re})$, en faisant apparaître le nombre de Reynolds de transition $\mathrm{Re}_c \simeq 2000$.

c) Dessiner l'allure du profil de vitesse $U(y)$ pour $x < L$ et $x > L$ dans les cas laminaire et turbulent.

Problème : L'écoulement de Couette turbulent

On considère un écoulement de Couette entre deux plaques planes parallèles infinies séparées d'une distance $2h$, animées d'une vitesse $2U_0$ l'une par rapport à l'autre (voir la figure 2). On se place dans le référentiel tel que la plaque supérieure ait une vitesse $+U_0$ et la plaque inférieur une vitesse $-U_0$. On note ici $\mathrm{Re} = U_0 h/\nu$ le nombre de Reynolds de l'écoulement. La direction transverse (perpendiculaire au plan de la figure) étant très grande devant h, on peut considérer le problème comme purement bidimensionnel. Il n'existe pas de gradient de pression moyen selon x, et toutes les quantités physiques sont supposées statistiquement stationnaires et invariantes par translation selon x.

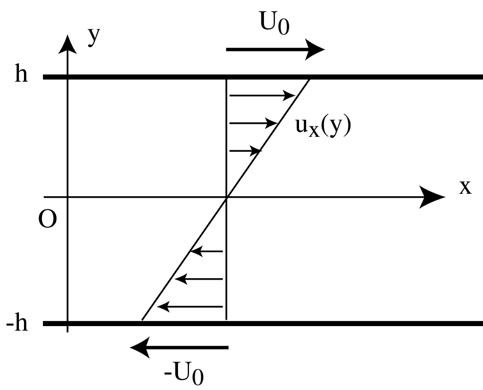

Figure 2: Géométrie de l'écoulement de Couette plan, et profil de vitesse correspondant dans le cas laminaire.

1. On sait que, dans le cas laminaire, le profil de vitesse dans cette géométrie est donné par $u_x(y) = U_0\, y/h$. On cherche à déterminer si, dans le cas turbulent, le profil de vitesse moyen $\overline{u}_x(y)$ peut également s'écrire sous cette forme.

   a) Ecrire l'équation de Reynolds selon x, et montrer que la contrainte totale est constante dans tout l'écoulement.

   b) Montrer qu'en introduisant la solution $\overline{u}_x(y) = U_0 y/h$ dans l'équation de Reynolds selon x, on obtient $\overline{u'_x u'_y} = \text{cste}$. En raisonnant sur les conditions aux limites en $y = \pm h$, que vaut cette constante ? Qu'en concluez-vous ?

2. On va chercher à déterminer le profil moyen $\overline{u}_x(y)$ dans le cas turbulent. On introduit la coordonnée réduite $\xi = y/h$, et on pose

$$\begin{aligned} \overline{u}_x(y) &= U_0\, f(\xi) \\ \overline{u'_x u'_y} &= U_0^2\, g(\xi). \end{aligned} \tag{2}$$

Montrer que l'on a

$$f'' = \mathrm{Re}\; g', \tag{3}$$

où les primes désignent les dérivées par rapport à ξ. Préciser la parité et les conditions aux limites en $\xi = \pm 1$ des fonctions $f(\xi)$ et $g(\xi)$.

3. Pour déterminer la fonction $f(\xi)$, il faut une relation supplémentaire reliant f et g. Pour cela, on peut utiliser un modèle de viscosité turbulente. On suppose que le tenseur de contrainte de Reynolds varie linéairement avec le gradient de vitesse moyen :

$$-\overline{u'_x u'_y} = \nu_T(y) \frac{\partial \overline{u}_x}{\partial y}, \tag{4}$$

où l'on a introduit le coefficient de viscosité turbulente $\nu_T(y)$.

   a) Quelle est la dimension de $\nu_T(y)$, et que représente ce coefficient ? Que pensez-vous du choix $\nu_T = \text{cste}$?

   b) On suppose que les fluctuations responsables du transfert de quantité de mouvement sont de vitesse caractéristique U_0 et de taille ℓ(y), et l'on pose donc

   $$\nu_T(y) = \alpha U_0 \ell(y),$$

   où α est une constante sans dimension. Justifier que l'on peut choisir $\ell = h - |y|$. Par symétrie, on pourra ne considerer que la moitié supérieure ($y > 0$), et ainsi oublier la valeur absolue. En déduire une relation entre g et f' puis, en utilisant l'équation (3), obtenir l'équation différentielle suivante :

   $$\phi'(1 + (\alpha \mathrm{Re})^{-1} - \xi) = \phi,$$

   où l'on a posé $\phi(\xi) = f'(\xi)$.

   c) En introduisant le changement de variable $Z = \xi/(1+(\alpha\mathrm{Re})^{-1})$, intégrer cette équation différentielle (toujours pour $\xi \geq 0$). Montrer finalement que le profil de vitesse s'écrit :

   $$f(\xi) = 1 - \frac{\ln(1 + \alpha\mathrm{Re}(1-\xi))}{\ln(1+\alpha\mathrm{Re})}. \tag{5}$$

   (*On pourra admettre ce résultat et passer à la suite*). Cette fonction est tracée en figure 3 pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. Vérifier (par un développement limité) que l'on retrouve bien la solution laminaire dans la limite $\alpha\mathrm{Re} \ll 1$. Que pensez-vous de la limite $\mathrm{Re} \to \infty$?

   d) Tracer qualitativement l'allure des profils de contrainte turbulente et visqueuse à haut nombre de Reynolds, et interprétez.

4. On s'intéresse finalement à la force de frottement due à l'écoulement sur chacune des plaques. On introduit le coefficient de friction

$$C_f = \frac{\tau_{xy}}{\frac{1}{2}\rho U_0^2},$$

où τ_{xy} est la contrainte sur une des plaques.

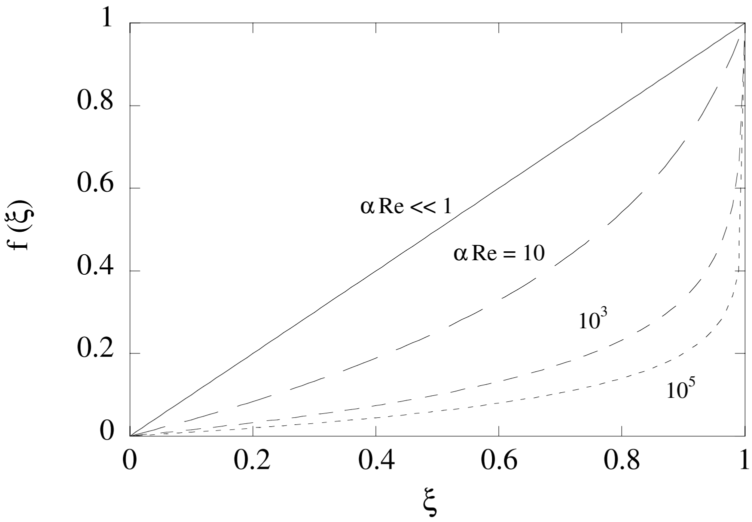

Figure 3: Profils de vitesse adimensionnés (5) pour différentes valeurs de αRe.

Calculer C_f en fonction de Re dans le cas laminaire. Montrer que, dans le cas turbulent, ce coefficient devient :

$$C_f = \frac{2\alpha}{\ln(1 + \alpha\mathrm{Re})}.$$

Que pensez-vous d'une telle dépendence avec le nombre de Reynolds ? Vérifier que, dans la limite $\alpha\mathrm{Re} \ll 1$, on retrouve bien le C_f du cas laminaire.

5. *Question bonus :* Le profil de vitesse (5) fait apparaître à haut nombre de Reynolds des couches limites près des parois. On peut définir l'épaisseur δ_v de ces couches limites comme la distance sur laquelle $\overline{u}_x(y)$ passe de $\pm U_0$ à une valeur proche de 0. Montrer que l'on a :

$$\delta_v \simeq \frac{\nu}{\alpha U_0} \ln(1 + \alpha\mathrm{Re}).$$

Par analogie avec l'expression de la sous-couche visqueuse d'un écoulement de couche limite turbulente, proposez un ordre de grandeur pour la constante α. Que devient δ_v à bas nombre de Reynolds ?