Master 2 Dynamique des Fluides et Energétique 2019-2020

Examen de turbulence, 22 novembre 2019

## II. Modèle k-l pour un écoulement cisaillé homogène

1°) $k = \frac{1}{2}\overline{u_i' u_i'}$ , $\varepsilon = 2\nu \overline{s_{ij}' s_{ij}'}$ , $\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$.

2°) $\nu_t$ en $m^2 s^{-1}$ , $k$ en $m^2 s^{-2}$, $l$ en $m$

$\Rightarrow \nu_t = c_l k^{1/2} l.$

$\varepsilon$ en $m^2 s^{-3}$ $\Rightarrow$ $\varepsilon = c_\varepsilon k^{3/2} l^{-1}$

3°) On a $\partial \bar{u}_i / \partial x_j \neq 0$, mais $\partial / \partial x_j$ (statistiques de vitesse) $= 0$ car la turbulence est homogène.

4°) $[\bar{s}_{ij}]_{xyz} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & S & 0 \\ S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$P = \frac{\tau_{ij}^R}{\rho} \bar{s}_{ij}$ avec $\tau_{ij}^R = -\rho \overline{u_i' u_j'} = 2\rho \nu_t \bar{s}_{ij}$

d'où $P = 2\nu_t \bar{s}_{ij} \bar{s}_{ij}$.

soit $P = 2\nu_t (\bar{s}_{xy}\bar{s}_{xy} + \bar{s}_{yx}\bar{s}_{yx}) = 2\nu_t \left(\frac{S^2}{4} + \frac{S^2}{4}\right) = \nu_t S^2.$

5°) $$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{\bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j}}_{=0}\right) k = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right]}_{=0.} + P - \varepsilon$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dk}{dt} = \nu_t S^2 - \varepsilon.$$

$$\frac{dk}{dt} = c_l k^{1/2} l S^2 - c_\varepsilon k^{3/2} l^{-1}$$

En régime stationnaire, $dk/dt = 0$, d'où $k^* = \frac{c_l}{c_\varepsilon}(Sl)^2$

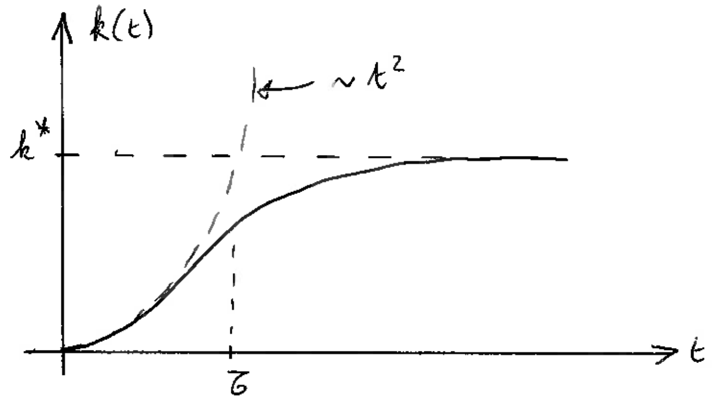
Pour $S \to 0$, on a $k^* \to 0$ : il n'y a plus de turbulence.

6°) $k(0) = 0$. À temps court, le terme $\varepsilon$ est négligeable.

$$\frac{dk}{dt} = C_\ell k^{1/2} \ell S^2. \Rightarrow \int_0^{k(t)} \frac{dk}{k^{1/2}} = C_\ell \ell S^2 \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \left[ 2 k^{1/2} \right]_0^{k(t)} = C_\ell \ell S^2 t \Rightarrow \underline{k(t) = \left( \frac{C_\ell}{2} \ell S^2 \right)^2 t^2}$$

valable jusqu'à ce que $k(\tau) \simeq k^*$, soit $\underline{\tau \simeq \frac{1}{S}}$.

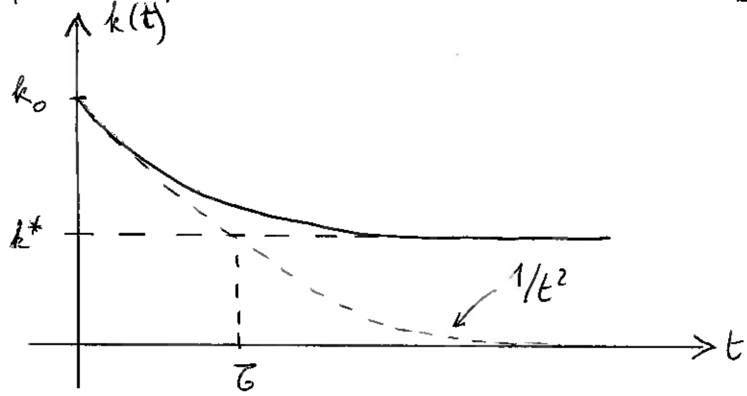



7°) $k(0) \gg k^*$. A temps court, le terme $P$ est négligeable.

$$\frac{dk}{dt} = - C_\varepsilon \frac{k^{3/2}}{\ell} \Rightarrow \int_{k_0}^{k(t)} \frac{dk}{k^{3/2}} = - \frac{C_\varepsilon}{\ell} \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \left[ -2 k^{-1/2} \right]_{k_0}^{k(t)} = - \frac{C_\varepsilon t}{\ell} \Rightarrow \underline{k(t) = \frac{k_0}{\left( 1 + \frac{C_\varepsilon}{2} \frac{k_0^{1/2}}{\ell} t \right)^2}}$$

valable jusqu'à ce que $k(\tau) \approx k^*$, soit encore $\underline{\tau \simeq 1/S}$.




8°) Un écoulement de couche limite n'est pas homogène, donc $\ell \neq$ cste. Il faut inclure une dépendance de $\ell$ avec la distance à la paroi $y$, par exemple de la forme $\ell \propto y$.

## III. Relaminarisat° d'une turbulence de grille

1°) Echelle intégrale : $L = \int_0^\infty f(r)\, dr$,

où $f(r) = \overline{u_x'(x)\, u_x'(x+r)} / \overline{u_x'^2}$

On détermine donc $L$ à partir de la corrélation de $u_x'$ en deux points $x$ et $x+r$.

Soit, pour une mesure en un point, grâce à l'hypothèse de "turbulence gelée", à partir de la corrélation à deux temps $t$ et $t+\tau$, avec $r = U\tau$.

2°) Hypothèse de turbulence gelée : $u_x'(x_0, t) \approx u_x'(x_0 - Ut, t_0)$

donc $k(t) \approx c_1 U^2 \left(\frac{Ut}{M}\right)^{-6/5}$ , $L(t) \approx c_2 M \left(\frac{Ut}{M}\right)^{2/5}$.

3°) $\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}$ , avec $\varepsilon(t) = -\frac{dk}{dt}$

soit $\varepsilon(t) = \frac{6}{5} c_1 \frac{U^3}{M} \left(\frac{Ut}{M}\right)^{-11/5}$

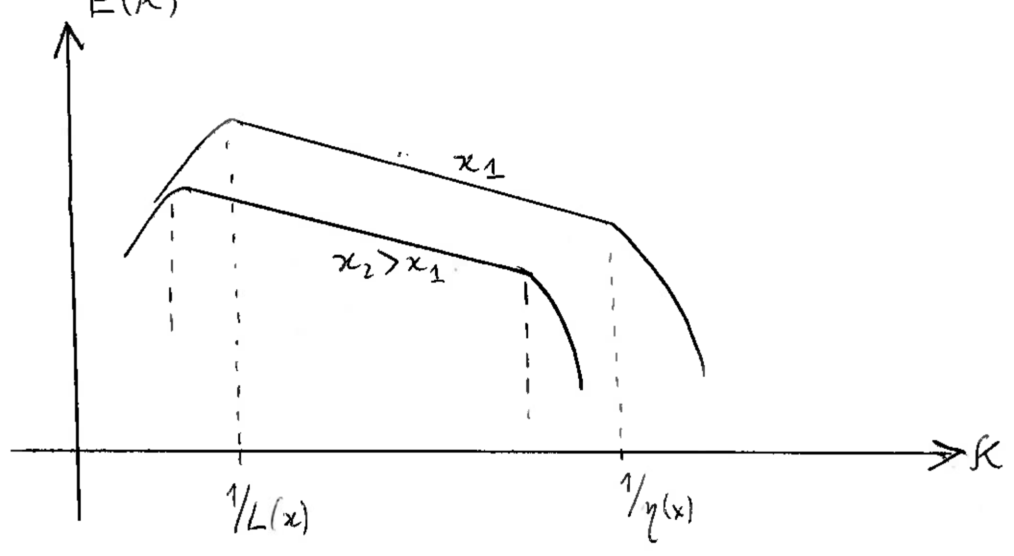
d'où $\eta(t) = \left(\frac{6}{5} c_1\right)^{-1/4} \frac{M^{1/4} \nu^{3/4}}{U^{3/4}} \left(\frac{Ut}{M}\right)^{11/20}$

soit $\frac{\eta(t)}{M} = \left(\frac{6}{5} c_1\right)^{-1/4} Re^{-3/4} \left(\frac{Ut}{M}\right)^{11/20}$

ou encore $\frac{\eta(x)}{M} = \left(\frac{6}{5} c_1\right)^{-1/4} Re^{-3/4} \left(\frac{x}{M}\right)^{11/20}$

d'où $m = 11/20$

4°)



5°) puisque $\eta \propto x^{11/20}$ et $L \propto x^{2/5}$,

il doit donc exister un $x^*$ tel que $\eta(x^*) \simeq L(x^*)$.

on trouve $\left(\frac{x^*}{M}\right)^{2/5} \simeq Re^{-3/4} \left(\frac{x^*}{M}\right)^{11/20}$

soit $\boxed{\frac{x^*}{M} \simeq Re^5}$

Pour $x \gg x^*$, il n'y a plus de domaine inertiel, donc plus de turbulence. on a donc un déclin purement visqueux : $k(t) \simeq k_0 e^{-t/\tau}$ et $L(t) \simeq$ cste.

## IV Transfert turbulent de chaleur entre 2 plaques planes.

1°) $$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{T}+T') + (\overline{u}_j + u_j')\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{T}+T') = K \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}(\overline{T}+T').$$

on moyenne $\Rightarrow$ $$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{T} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j' T'}\right) + K \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x_j \partial x_j}.$$

2°) on a $\partial/\partial x = 0$ et $\partial/\partial t = 0$ et $\overline{u}_y = 0$

d'où $$0 = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{u_y' T'}\right) + K\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial y^2}$$

soit $$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\overline{u_y' T'} + K\frac{\partial T}{\partial y}\right) = 0.$$

donc $$J = \overline{u_y' T'} - K\frac{\partial \overline{T}}{\partial y} = \text{cste}.$$

Dans le cas laminaire, $\overline{u_y' T'} = 0$ et $\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\Delta T}{h}$

soit $\boxed{J = -K\frac{\Delta T}{h}}$

3°) $J = -K\left.\frac{\partial \overline{T}}{\partial y}\right|_{y=0} = -K\frac{T_{CL}}{\delta_\nu}$, avec $\delta_\nu = \frac{\nu}{u^*}$ et $\nu = K$,

d'où $\boxed{J = -u^* T_{CL}}$

4°) on a $J_{\text{couche limite}} = J_{\text{centre}}$ par continuité

$$\underset{-u^* T_{CL}}{\underbrace{J_{\text{couche limite}}}} \qquad \overline{u_y' T'} \simeq -K_t \frac{\partial \overline{T}}{\partial y} \simeq -K_t \frac{\Delta T - 2 T_{CL}}{h - 2\delta_\nu}.$$

avec $h \gg \delta_\nu$, on a donc

$$K_t \frac{\Delta T - 2 T_{CL}}{h} \simeq u^* T_{CL}.$$

soit $K_t \simeq u^* h \dfrac{T_{CL}}{\Delta T - 2 T_{CL}} \simeq \boxed{u^* h \dfrac{1}{\Delta T / T_{CL} - 2}}$

- Cas $T_{CL}/\Delta T \to 0$ : Cas laminaire, $K_t \to 0$.
- Cas $T_{CL}/\Delta T \to 1/2$ : cas très turbulent, tout le gradient thermique est concentré près des parois, et $K_t$ diverge