Université Paris-Saclay **Année 2019-20**
Master 2 Dynamique des Fluides et Energétique

Examen de Turbulence

Vendredi 22 Novembre 2019

Durée : 3 heures - sans document

1 Simulation numérique d'une couche limite turbulente

On considère dans cette partie un écoulement de couche limite de plaque plane d'épaisseur δ et de vitesse extérieure U en développement spatial sans gradient de pression.

1. En adoptant une résolution en maillage Δx^+, Δy^+, Δz^+, exprimer le nombre total de points pour simuler un volume de turbulence pariétale de dimension $L_x\delta \times \delta \times L_z\delta$ en fonction de L_x, L_z, $Re_\tau = \frac{u_\tau \delta}{\nu}$ et de la résolution adoptée. Discuter la dépendance du résultat en fonction de Re_τ.

2. On rappelle les résolutions LES et DNS couramment utilisées pour simuler une turbulence pariétale :
$$LES: \quad \Delta x^+ = 50, \Delta y^+ = 1, \Delta z^+ = 12,$$
$$DNS: \quad \Delta x^+ = 6, \Delta y^+ = 0.5, \Delta z^+ = 6.$$
En calculant le rapport $(N_{xyz})_{DNS} \,/\, (N_{xyz})_{LES}$, justifier l'appellation de Quasi-DNS (QDNS) pour une LES de turbulence pariétale. Quelle en est la raison physique ?

3. En adoptant un nombre de CFL=0.5, exprimer le pas de temps Δt en fonction de la vitesse U et de Δy. Rappel :
$$CFL = \frac{U\Delta t}{min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)}.$$

4. Exprimer le nombre de pas de temps nécessaire à la traversée du domaine de calcul $L_x\delta$ en fonction de L_x, Re_τ, Δy^+.

5. Afin d'obtenir des statistiques convergées, un temps de simulation correspondant à N_w traversées de domaines (typiquement $N_w > 10$) doit être réalisé. Estimer le coût total du calcul $\tilde{C}$ (unité de $\tilde{C}$ en $[s/point/iteration]$) en fonction de L_x, L_z, N_w, $Re_\tau = \frac{u_\tau \delta}{\nu}$ et de la résolution adoptée. Discuter le résultat obtenu.

2 Modèle $k-\ell$ pour un écoulement cisaillé homogène

On rappelle que le modèle $k-\epsilon$ est construit à partir d'une viscosité turbulente ν_t et de deux équations de transport empiriques pour l'énergie cinétique turbulente k et le taux de dissipation d'énergie turbulente ϵ,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{u}_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)k=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right]+P-\epsilon,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{u}_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\epsilon=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon}\right)\frac{\partial \epsilon}{\partial x_j}\right]+c_1\frac{P\epsilon}{k}-c_2\frac{\epsilon^2}{k}.$$

où $P=(\tau_{ij}^R/\rho)\overline{s}_{ij}>0$ est le terme de production des fluctuations turbulentes, et τ_{ij}^R le tenseur de Reynolds.

Dans cet exercice on considère un modèle plus simple, dit “à une équation” : il s'agit d'un modèle de viscosité turbulente dans lequel on ne conserve comme champ dynamique que k, et où l'on introduit une longueur de mélange ℓ, que l'on supposera fixée (on n'écrit pas d'équation d'évolution pour ℓ).

1. Rappeler la définition de k et de ϵ, et exprimer ν_t dans le cadre du modèle $k-\epsilon$.
2. En raisonnant par analyse dimensionelle, proposer une expression pour la viscosité turbulente ν_t et la dissipation d'énergie (par unité de masse) ϵ en fonction de k et ℓ. On nommera c_ℓ et c_ϵ les constantes numériques (supposées d'ordre 1) qui apparaissent dans ces expressions.

On souhaite tester le modèle $k-\ell$ dans le cas d'un écoulement turbulent cisaillé homogène de la forme $\overline{u}_x(y)=Sy$, où S est le taux de cisaillement supposé maintenu constant par des conditions aux limites appropriées.

3. Justifier que les termes de transport (convectifs et diffusifs) de l'énergie turbulente k sont nuls.
4. Exprimer le tenseur de déformation moyenne $\overline{s}_{ij}$ dans la base (x,y,z), puis le terme de production P en fonction de ν_t et S.
5. Montrer que l'équation d'évolution pour k devient alors
$$\frac{dk}{dt}=c_\ell k^{1/2}\ell S^2-c_\epsilon\frac{k^{3/2}}{\ell}.$$
Que vaut l'énergie cinétique turbulente k^* en régime stationnaire ? Commentez la limite $S\to 0$.
6. On suppose que l'écoulement est initialement laminaire. Que devient l'équation différentielle précédente à temps court ? Résoudre cette équation approchée, et évaluer le temps caractéristique τ au-delà duquel cette solution approchée n'est plus valable. Tracer l'allure de $k(t)$ en mettant en évidence les comportements à temps court et à temps long.
7. On suppose au contraire maintenant qu'à l'instant initial l'écoulement est très turbulent, tel que $k(0)\gg k^*$. Répondez de nouveau à la question 6 pour cette nouvelle condition initiale.
8. Que pensez-vous d'un tel modèle pour un écoulement de couche limite ?

3 Relaminarisation d'une turbulence de grille

On considère une expérience de turbulence de grille dans une soufflerie. On note U la vitesse moyenne de l'écoulement, M la maille de la grille, et $Re = UM/\nu$ le nombre de Reynolds. Des mesures de fluctuations de vitesse effectuées à différentes distances x de la grille montrent que l'énergie cinétique turbulente k et de l'échelle intégrale L évoluent, pour $x \gg M$, comme

$$k(x) \simeq c_1 U^2 (x/M)^{-6/5}, \qquad L(x) \simeq c_2 M (x/M)^{2/5} \tag{1}$$

avec $c_1 \simeq 0.1$ et $c_2 \simeq 0.5$. On suppose que la taille de la soufflerie est suffisamment grande pour que la croissance de $L(x)$ ne soit jamais limitée.

1. Rappeler la définition de L, et expliquer comment cette échelle est déterminée à partir des mesures de fluctuations de vitesse.

2. Expliquer comment ces lois d'évolution spatiale se traduisent en lois d'évolution temporelle, $k(t)$ et $L(t)$, que l'on explicitera.

3. En supposant la turbulence localement isotrope, exprimer l'échelle de Kolmogorov η en fonction de x, et montrer que

$$\frac{\eta(x)}{L(x)} \propto Re^{-3/4} (x/M)^m,$$

   où m est un exposant que l'on identifiera.

4. On rappelle que pour des nombres d'onde κ dans le domaine inertiel, le spectre d'énergie est donné par la loi des 5/3 de Kolmogorov,

$$E(\kappa) \simeq C_K \epsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}$$

   (on ne confondra pas κ avec l'énergie cinétique turbulente k). En ne considèrant que des distances x telles que $\eta(x) \ll L(x)$, tracer l'allure de $E(\kappa)$ à différentes valeurs de x, en mettant bien en évidence le domaine inertiel et les nombres d'onde associés à l'échelle intégrale et à l'échelle de Kolmogorov.

5. En déduire qu'au-delà d'une certaine distance x^*, on a $\eta \simeq L$; on exprimera x^*/M en fonction du nombre de Reynolds. Que pensez-vous des lois (1) pour $x \gg x^*$? proposez des lois alternatives dans ce régime.

4 Transfert turbulent de chaleur entre deux plaques planes

On considère un écoulement turbulent dans la géométrie de Poiseuille plan, entre deux plaques planes parallèles situées en $y = 0$ et $y = h$. Cet écoulement est statistiquement stationnaire et pleinement développé (invariant par translation selon x). Les plaques sont maintenues aux températures $T(0) = T_0$ et $T(h) = T_0 + \Delta T$, avec $\Delta T > 0$. On ne prend pas en compte les effets de flottaison dans ce problème : la masse volumique du fluide est constante, et la température peut donc être considérée comme un champ scalaire passif. On introduit la décomposition de Reynolds pour les deux champs, $u_i = \overline{u}_i + u'_i$ et $T = \overline{T} + T'$. On note u^*

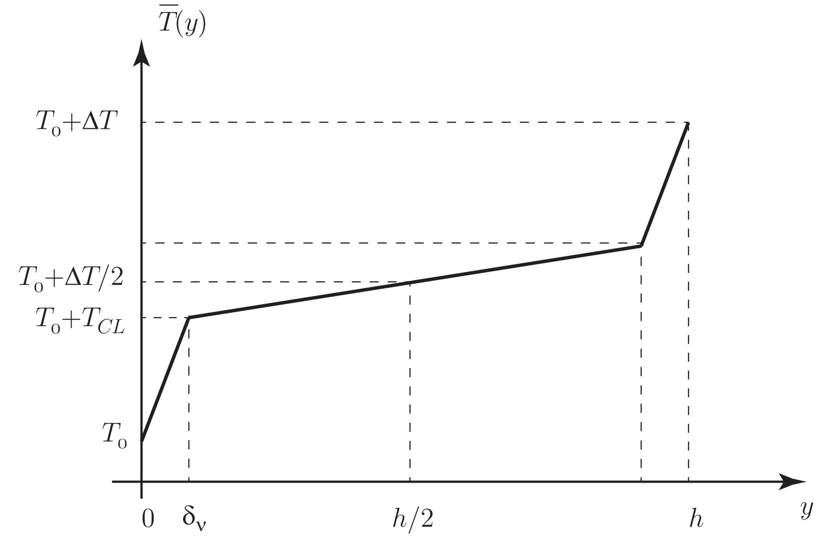

Figure 1: Profil de température moyen entre les 2 plaques.

la vitesse de friction, et $Re^* = u^* h/\nu$ le nombre de Reynolds turbulent, où ν est la viscosité cinématique du fluide.

On rappelle l'équation de la chaleur,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa \nabla^2 T,$$

où κ est la diffusivité thermique.

1. Ecrire l'équation d'évolution pour $\overline{T}$.

2. Compte tenu des symétries de l'écoulement, montrer que le flux de chaleur vertical

$$J = \overline{T' u'_y} - \kappa \frac{\partial \overline{T}}{\partial y}$$

est indépendant de y. Exprimer J dans le cas d'un écoulement laminaire en fonction des données du problème (h, ΔT, etc.)

3. On considère le cas turbulent, $Re^* \gg 1$. On suppose que le fluide est un gaz, de Prandtl $Pr = \nu/\kappa = 1$. Dans ce cas, il se forme sur chaque plaque une fine couche limite thermique, dont l'épaisseur est égale à l'épaisseur de sous-couche visqueuse δ_ν. On suppose également que le gradient de température est concentré essentiellement dans ces couches limites, avec $T(\delta_\nu) = T_0 + T_{CL}$ et $T(h - \delta_\nu) = T_0 + \Delta T - T_{CL}$ (voir figure 1). Calculer J en fonction de u^* et T_{CL}.

4. Hors couche limite, le flux de chaleur est principalement turbulent, et l'on suppose qu'il peut s'écrire à l'aide d'un modèle de diffusivité turbulente, $\overline{T' u'_y} \simeq -\kappa_t \partial \overline{T}/\partial y$. En déduire l'expression du coefficient κ_t en fonction de u^*, h, et du rapport $T_{CL}/\Delta T$. Commentez les cas extrêmes $T_{CL}/\Delta T \to 0$ et $\to 1/2$.