

II - Mélange d'une espèce chimique dans un jet turbulent.

1°) on introduit $C = \bar{C} + C'$ et $u_i = \bar{u}_i + u_i'$

$$(*) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\bar{C} + C') + (\bar{u}_j + u_j') \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{C} + C') = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\bar{C} + C')$$

on développe, on moyenne, on utilise $\overline{u_i'} = 0$, $\overline{C'} = 0$

$$(**) \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{C} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{C} = \underbrace{-\overline{u_j' \frac{\partial}{\partial x_j} C'}} + \kappa \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x_j^2}$$

on a $\frac{\partial u_j'}{\partial x_j} = 0$, donc $\rightarrow = \frac{\partial}{\partial x_j} (-\overline{u_j' C'})$.

Le terme $-\overline{u_j' C'}$ est le transport de fluctuations C' par les fluctuations u_j' .

2°) On calcule $(*) - (**)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C'}{\partial t} + u_j' \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{C} + \bar{u}_j \frac{\partial C'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial}{\partial x_j} C' &= \overline{u_j' \frac{\partial}{\partial x_j} C'} + \kappa \frac{\partial^2 C'}{\partial x_j^2} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) C' &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\overline{u_j' \bar{C}} - \overline{u_j' C'} + \overline{u_j' C'} \right) + \kappa \frac{\partial^2 C'}{\partial x_j^2} \\ \text{"} & \\ D/Dt & \end{aligned}$$

3°) on multiplie l'eq. précédente par C' et on moyenne :

$$\overline{C' \frac{\partial C'}{\partial t}} + \overline{\bar{u}_j C' \frac{\partial C'}{\partial x_j}} = \overline{C' \frac{\partial}{\partial x_j} (-u_j' \bar{C} + \bar{u}_j' C' - u_j' C')} + \kappa \overline{C' \frac{\partial^2 C'}{\partial x_j^2}}$$

on a :

- $\overline{C' \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_j' C'} = 0$

- $\overline{\kappa C' \frac{\partial^2 C'}{\partial x_j^2}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial k_c}{\partial x_j} \right) - \kappa \overline{\left(\frac{\partial C'}{\partial x_j} \right)^2}$

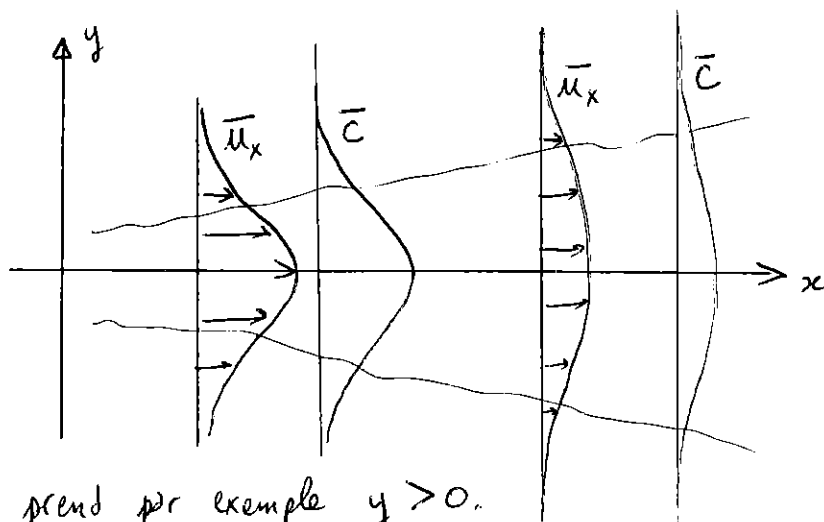
on regroupe ensemble tous les termes de flux en $\partial/\partial x_j$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) k_c = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{1}{2} \overline{u_j' C'^2} + \kappa \frac{\partial k_c}{\partial x_j} \right)}_{T_c} - \underbrace{\overline{C' u_j' \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_j}}}_{P_c} - \underbrace{\kappa \overline{\left(\frac{\partial C'}{\partial x_j} \right)^2}}_{E_c}$$

4°) avec $\bar{u}_y \ll \bar{u}_x$ et $\partial/\partial x \ll \partial/\partial y$, on obtient :

$$\bar{u}_y \frac{\partial k_c}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{2} \overline{u_y' C'^2} + \kappa \frac{\partial k_c}{\partial y} \right) - \overline{C' u_y' \frac{\partial \bar{C}}{\partial y}} - \kappa \overline{\left(\frac{\partial C'}{\partial x_j} \right)^2}$$

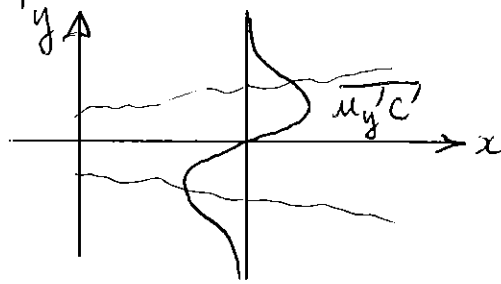
5°)



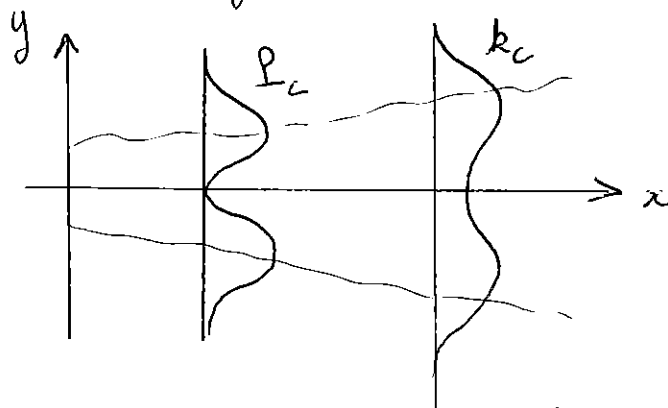
6°) On prend par exemple $y > 0$.

on considère une fluctuat° $u_y' > 0$, qui emporte une particule de forte concentration \bar{C} dans une région de faible concentration \bar{C} . On a donc $C' > 0$, donc $u_y' C' > 0$.

Inversement, pour $y < 0$, on a $\overline{u_y' c'} < 0$.



7°) pour $y > 0$, on a $\frac{\partial \bar{c}}{\partial y} < 0$ et $\overline{u_y' c'} > 0$,
donc $P_c = -\overline{u_y' c'} \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} > 0$. De même pour $y < 0$.



8°) k_c a une allure similaire à P_c , sauf en $y=0$, où on doit avoir $P_c = 0$ mais $k_c \neq 0$ car il existe des fluctuations $c' \neq 0$.

9°) D_c est homogène à $m^2 s^{-1}$.

Dans le cadre du modèle de longueur de mélange, on peut écrire $D_c \approx l_m u^*$, où $l_m(x)$ = largeur du jet à x .

et $u^*(x)$ = fluctuat° de vitesse typique, d'ordre $\left| l_m \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right|$.

Dans le cadre du modèle $k-\epsilon$, on peut écrire

$$D_c \approx \frac{k_c^2}{\epsilon_c}$$

III Enstrophie en turbulence bi-dimensionnelle.

1°) Le terme $w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ représente l'étirement et le basculement de la vorticité $\vec{\omega}$ par le gradient de vitesse $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

Pour un écoulement 2D, \vec{u} dans le plan (x, y) ,
donc $\vec{\omega} = \omega_z(x, y) \vec{e}_z$.

$$\text{Donc } \left(\underset{\downarrow 0}{w_x} \frac{\partial}{\partial x} + \underset{\downarrow 0}{w_y} \frac{\partial}{\partial y} + \underset{\downarrow 0}{w_z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{u} = \vec{0}$$

Il n'y a pas de production/destruction de $\vec{\omega}$ le long d'une ligne de courant.

2°) on multiplie l'équation par w_i , et on obtient :

$$\left. \begin{aligned} w_i \frac{\partial}{\partial t} w_i &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} w_i w_i \right) = \frac{\partial Z}{\partial t} \\ w_i u_j \frac{\partial w_i}{\partial t} &= u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} w_i w_i \right) = u_j \frac{\partial Z}{\partial x_j} \end{aligned} \right\} \frac{D}{Dt} Z$$

$$W = w_i w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = w_i w_j (w_{ij} + s_{ij})$$

or $w_i w_j$ est un tenseur symétrique,

donc $w_i w_j w_{ij} = 0$, d'où $W = w_i w_j s_{ij}$.

3°) On se place dans la base propre locale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de S_{ij} .
 on a $S_{ij} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}$ avec $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$.

Pour $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$ orienté arbitrairement, on a donc

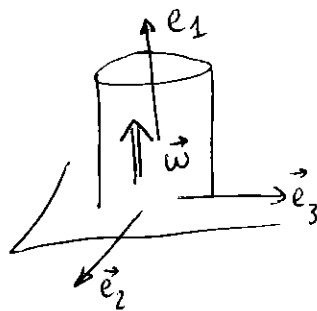
$$W = \gamma_1 \omega_1^2 + \gamma_2 \omega_2^2 + \gamma_3 \omega_3^2.$$

pour avoir $W > 0$, il faut avoir $\omega_i \neq 0$ sur une des valeurs propres positives.

Par exemple : tourbillon axisymétrique étiré avec

$$\gamma_1 > 0 \text{ et } \gamma_2 = \gamma_3 = -\frac{1}{2} \gamma_1 < 0$$

$$\rightarrow W = \gamma_1 \omega^2 > 0.$$



4°) Puisque $\omega_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = 0$ en 2D (question 1), alors $W = 0$.

$\frac{D}{Dt} Z = 0 \Rightarrow Z$ conservé le long d'une ligne de courant.

or la cascade d'énergie vers les petites échelles est associée à la production de Z . Donc en 2D il ne peut y avoir de cascade d'énergie.

IV Simulation DNS de l'écoulement autour d'un avion.

1°) Puissance : $P = F U$, avec $F = 4 \times 300 \text{ kN}$
et $U = 250 \text{ m/s}$, soit $P \approx 3 \cdot 10^8 \text{ W}$.

2°) Volume de l'Avion : $V \approx \frac{\pi}{4} (\text{diamètre})^2 \text{ longueur}$
 $\approx \frac{\pi}{4} \times (8,4)^2 \times 70 \approx 4000 \text{ m}^3$

(on néglige le volume des ailes).

↳ Masse d'air déplacé : $m_a = \rho_a V \approx 1600 \text{ Kg}$.

d'où $\varepsilon = \frac{P}{m_a} \approx 200 \text{ 000 m}^2 \text{ s}^{-3}$.

3°) Echelle de Kolmogorov : $\eta = \left(\frac{U^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \approx 25 \mu\text{m}$.

4°) Volume de la simulation :

Longueur : $6 \times 72 = 432 \text{ m}$
Largeur : $3 \times 80 \approx 180 \text{ m}$
Hauteur : $3 \times 23 = 69 \text{ m}$ $\rightarrow \approx 5,4 \cdot 10^6 \text{ m}^3$

Nbre de mailles : $\frac{L_x L_y L_z}{\eta^3} \approx N \approx 4 \cdot 10^{20}$

Nbre de pas de temps : $N_t \approx \frac{L/U}{\Delta t}$, avec $\Delta t \approx \frac{\eta}{U}$.

soit $N_t \approx \frac{L}{\eta} \approx 3 \cdot 10^6$.

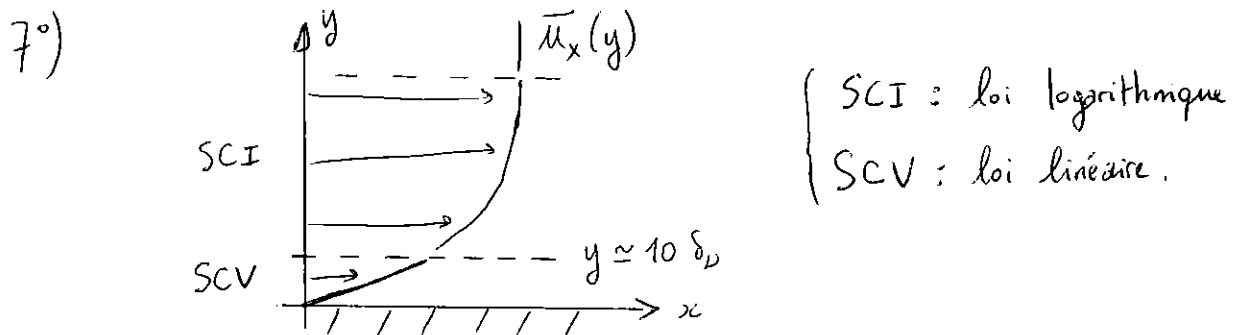
Ces ordres de grandeur sont inaccessibles aujourd'hui.

5°) Surface : $\begin{cases} \text{Fuselage} & \pi \times 8,4 \times 70 \simeq 1800 \text{ m}^2 \\ \text{Ailes} & 2 \times 70 \times 12 \simeq 1700 \text{ m}^2 \end{cases}$
 Soit $S \simeq 3500 \text{ m}^2$ (on néglige les autres éléments)

Contrainte : $\sigma \simeq \frac{F}{S} \simeq \frac{1200 \text{ kN}}{3500 \text{ m}^2} \simeq 340 \text{ N/m}^2$.

6°) Vitesse de friction : $u^* = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \simeq 30 \text{ m/s}$

Sous-couche visqueuse : $\delta_\nu = \frac{\nu}{u^*} \simeq 1,5 \mu\text{m}$



8°) Le maillage dimensionné sur $\eta = 25 \mu\text{m}$ sera insuffisant dans la SCV avec $\delta_\nu \simeq 1,5 \mu\text{m}$, mais suffisant dans la SCI (qui débute à $10 \delta_\nu \simeq 15 \mu\text{m}$).

Un maillage avec raffinement près de la paroi est nécessaire ici.

