

Examen de Turbulence - Corrigé

Lundi 14 Novembre 2016

1 Le modèle de Spalart-Allmaras

Spalart et al. (1997) proposent un modèle hybride RANS-LES basé sur le modèle à une équation de transport pour la pseudo-viscosité turbulente $\tilde{\nu}$ de Spalart-Allmaras (1992) donnée par:

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \tilde{\nu})}{\partial x_j} = c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] - c_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{d_w} \right)^2 \quad (1)$$

où d_w désigne la distance à la paroi qui représente l'échelle de longueur RANS du modèle et \tilde{S} une mesure scalaire du gradient de vitesse (norme du rotationnel de la vitesse par exemple).

(a) Identifier les termes de production et de destruction du modèle RANS.

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \tilde{\nu})}{\partial x_j} = \underbrace{c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu}}_{\text{Production de } \tilde{\nu}} + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] - \underbrace{c_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{d_w} \right)^2}_{\text{Destruction de } \tilde{\nu}} \quad (2)$$

(b) Montrer que sous des hypothèses d'équilibre (*i.e.* $Production \approx Destruction$), le modèle fournit une viscosité turbulente de la forme $\tilde{\nu} \approx \tilde{S} d_w^2$

L'équilibre $Production \approx Destruction$ s'écrit $c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu} \approx c_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{d_w} \right)^2$ soit $\tilde{\nu} \approx \tilde{S} d_w^2$.
On peut noter que d_w joue le rôle de distance à la paroi pour ce modèle.

(c) Dans leur modèle hybride, les auteurs proposent de remplacer l'échelle de longueur RANS du modèle par $\tilde{d} = \min(d_w, C_{DES} \Delta)$ où $C_{DES} = 0.65$ et Δ est une taille représentative du maillage. Ce modèle est appelé DES97 pour Detached Eddy Simulation.
Expliquer cette appellation en justifiant comment l'approche DES peut être considérée comme une approche hybride RANS/LES.

En proche paroi, *i.e.* pour $d_w < C_{DES} \Delta$ le modèle DES97 s'écrit $\tilde{d} = d_w$ de sorte que l'on retrouve le modèle RANS de Spalart-Allmaras originel.
Loin de la paroi, *i.e.* pour $d_w > C_{DES} \Delta$ la taille de maille Δ devient la nouvelle échelle de longueur du modèle ($\tilde{d} = C_{DES} \Delta$) de sorte que le modèle fournit une viscosité de sous-maille

$\tilde{\nu} \approx \tilde{S}(C_{DES}\Delta)^2$ proche de celle d'un modèle de Smagorinsky.

Le modèle DES97 peut donc être considéré comme un modèle hybride au sens où il se comporte comme un modèle sous-maille loin de la paroi et comme un modèle RANS en "proche" paroi.

(d) Y a-t-il des limitations à ce modèle DES97? Connaissez vous des améliorations de ce modèle? Si oui, expliquez les grands principes de leur fonctionnement.

La définition $\tilde{d} = \min(d_w, C_{DES}\Delta)$ définit une zone grise $d_w \approx C_{DES}\Delta$ où la solution n'est ni LES ni RANS et dont la frontière est entièrement définie par le maillage. Si on note δ l'épaisseur de couche limite locale, il faudrait assurer $\delta > C_{DES}\Delta$ de sorte à assurer le traitement RANS dans la couche limite attachée. Dans le cas contraire, le passage RANS à LES se produirait à l'intérieur de la couche limite où la résolution en maillage ne permet pas une résolution LES. Il s'ensuit une diminution des tensions modélisées ("Modelled Stress Depletion") conduisant à une relaminarisation artificielle de la couche limite.

Pour pallier cet effet délétère de la zone grise, plusieurs méthodes ont été proposées parmi lesquelles on peut citer la DDES et la ZDES. La DDES ("Delayed Detached Eddy Simulation") repose sur l'introduction d'une fonction f_d capable de refuser le passage en mode LES pour un point situé dans la couche limite. La ZDES ("Zonal Detached Eddy Simulation") consiste en partie à imposer les parties RANS et LES de façon indépendante du maillage.

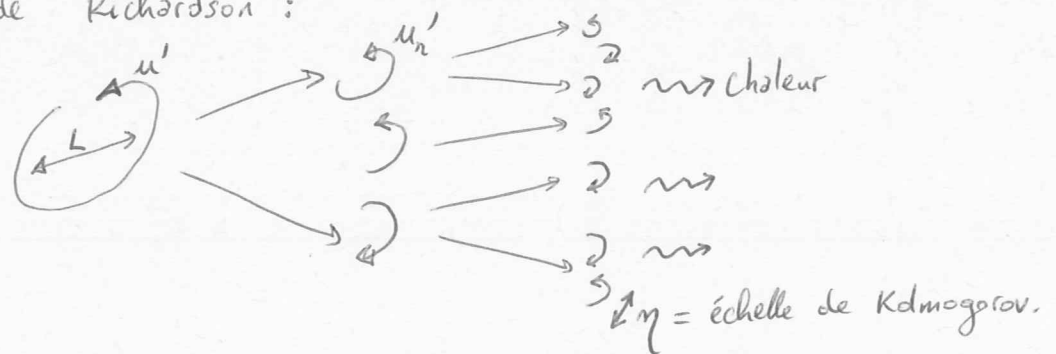
(e) Dans le cas du modèle $k - \varepsilon$ où $\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$, proposez une formulation DES97 adaptée à ce modèle.

D'un point de vue dimensionnel, la viscosité turbulente a la dimension du produit d'une échelle de vitesse \mathcal{U} et d'une échelle de longueur L . Dans le cas du modèle $k - \varepsilon$, les échelles de vitesse et de longueur sont respectivement données par \sqrt{k} et $\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$. Par analogie avec le modèle de Spalart-Allmaras, une formulation DES pour le modèle $k - \varepsilon$ pourrait s'écrire $(\nu_t)_{DES} = C_\mu \sqrt{k} \cdot \min\left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_{DES}\Delta\right)$.

III - Approche spectrale du déclin d'une turbulence homogène.

1°) L'énergie des grandes échelles est transférée, via des effets non-linéaires (instabilités, étirement tourbillonnaire) à des échelles inférieures tant que les effets visqueux restent négligeables.

Cascade de Richardson :



$$2°) k_\eta \sim \frac{1}{\eta} = \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3}\right)^{1/4}$$

$$\frac{k_\eta}{k_0} = L \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3}\right)^{1/4} \quad \text{avec} \quad \varepsilon \approx \frac{u'^3}{L}, \quad \text{soit} \quad \frac{k_\eta}{k_0} \approx \left(\frac{u'^3 L^3}{\nu^3}\right)^{1/4} \approx Re^{3/4}$$

$$3°) D_{LL}(r) = \overline{[u_L(x+r) - u_L(x)]^2} \approx C_0 (\varepsilon r)^{2/3} \quad \text{pour} \quad \eta \ll r \ll L$$

$$4°) e_c = \int_{k_0}^{k_\eta} C \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} dk = C \varepsilon^{2/3} \left[\frac{k^{-2/3}}{-2/3} \right]_{k_0}^{k_\eta}$$

$$= \frac{3}{2} C \varepsilon^{2/3} \left[\frac{1}{k_0^{2/3}} - \frac{1}{k_\eta^{2/3}} \right]$$

Pour \$Re \gg 1\$, \$k_\eta \gg k_0\$, d'où $e_c \approx \frac{3}{2} C \frac{\varepsilon^{2/3}}{k_0^{2/3}}$

5°) La production d'énergie cinétique turbulente,

$P = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$, est liée à l'existence de gradient d'écoulement moyen $\partial \overline{u_i} / \partial x_j$. Donc, pour une turbulence homogène et isotrope, $P = 0$, et donc $\frac{de_c}{dt} = -\varepsilon$.

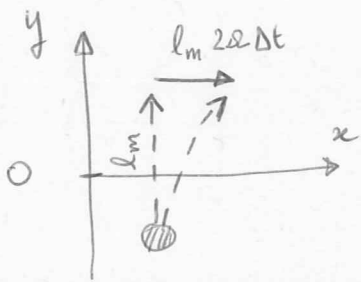
8°) pour $\Omega = 0$, on a $\overline{u_x' u_y'}(y=0) = 0$, car, par symétrie, une fluctuation u_x' donnée a la même probabilité d'être associée à $u_y' > 0$ ou $u_y' < 0$.

pour $\Omega > 0$, une particule fluide en mouvement est déviée vers la droite par la force de Coriolis. Ainsi, $u_y' > 0$ implique un mouvement vers les $x > 0$, et donc $u_x' > 0$, d'où $\overline{u_x' u_y'} > 0$.

9°) on a $\overline{u_x' u_z'} = \overline{u_y' u_z'} = 0$ par symétrie pour $\Omega = 0$.

Pour $\Omega \neq 0$, Etant donné que la force de Coriolis n'a pas de composante selon z , les mouvements selon z ne sont pas modifiés, et on a toujours $\overline{u_x' u_z'} = \overline{u_y' u_z'} = 0$.

10°) On suppose une fluctuation $u_y' > 0$ faisant monter une particule de y à $y + l_m$. Ce mouvement s'effectue



pendant un temps $\Delta t = \frac{l_m}{u_y'}$.

le PFD, $\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}$, montre que

u_x' va augmenter de $\Delta u_x = F_x \Delta t$,

avec $F_x = 2\Omega u_y'$

d'où $u_x' \approx 2\Omega u_y' \Delta t \approx 2\Omega l_m$.

soit, en ordre de grandeur, $\overline{u_x' u_y'} \approx 2\Omega l_m u^*$.

11°) viscosité turbulente : $-\overline{u_x' u_y'} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}$ avec $\nu_t \approx l_m u^*$

d'où $\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \approx -2\Omega$, ce qui est bien

conforme à la fig. 1.

4°) RANS selon y :

$$\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} + \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - 2\nu \Omega \bar{u}_x$$

$$+ \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \bar{u}_y - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u_x' u_y'}) - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u_y'^2}$$

Invariances du problème : $\partial/\partial t = 0$, $\partial/\partial x = 0$, $\bar{u}_y = 0$, soit

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - 2\nu \Omega \bar{u}_x - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u_y'^2}.$$

5°) Tous les termes étant indépendant de x , on peut intégrer par rapport à y , et on obtient

$$\bar{p}(y) = p_0(x) - \rho \overline{u_y'^2} - 2\rho\nu\Omega \int_0^y \bar{u}_x(y) dy.$$

$$6°) \Delta p = \bar{p}(y=h) - \bar{p}(y=-h) = -2\rho\nu\Omega \left[\int_0^h \bar{u}_x(y) dy - \int_0^{-h} \bar{u}_x(y) dy \right]$$

$$= -2\rho\nu\Omega \int_{-h}^h \bar{u}_x(y) dy = -4\rho\nu\Omega h u_m$$

avec $u_m = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \bar{u}_x(y) dy.$

$$7°) \text{ RANS selon } x: \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u_x' u_y'}.$$

or $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\partial p_0}{\partial x}$ qui est indépendant de y , on peut

donc intégrer selon y .

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = \rho \frac{\partial}{\partial y} \left(\underbrace{\nu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} - \overline{u_x' u_y'}}_{\tau_{\text{tot}}(y)/\rho} \right)$$

$$\text{d'où } \frac{\partial p_0}{\partial x} y = \tau_{\text{tot}}(y) - \tau_{\text{tot}}(0)$$

IV - Ecoulement de canal plan en référentiel tournant.

1°) $F_i = -\varepsilon_{ijk} 2\Omega_j u_k$, avec $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}$.

soit :

$$\begin{cases} F_x = -2\varepsilon_{xyz} \Omega_y u_z - 2\varepsilon_{xzy} \Omega_z u_y = 2\Omega u_y \\ F_y = -2\varepsilon_{yzx} \Omega_z u_x - 2\varepsilon_{yxz} \Omega_x u_z = -2\Omega u_x \\ F_z = -2\varepsilon_{zxy} \Omega_x u_y - 2\varepsilon_{zyx} \Omega_y u_x = 0 \end{cases}$$

d'où $\vec{F} = 2\Omega (u_y, -u_x, 0) = -2\vec{\Omega} \wedge \vec{u}$.

2°) On introduit $u_i = \bar{u}_i + u_i'$ et $p = \bar{p} + p'$ dans NS (2) et on moyenne :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i'}{\partial t} + (\bar{u}_j + u_j') \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i + u_i') = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i}$$

$$- 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \bar{u}_k - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k' + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_j}$$

d'où l'Eq. RANS en Ref. tournant :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \bar{u}_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \bar{u}_k + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j}$$

identique à l'Eq RANS classique, mais avec le terme supplémentaire $-2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \bar{u}_k$.

3°) On multiplie RANS par \bar{u}_i (avec somme sur i), on obtient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) K = -\frac{1}{\rho} \bar{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \bar{u}_i \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \bar{u}_k \bar{u}_i + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \bar{u}_i$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\rightarrow = 0}$

Le terme de Coriolis est nul, car ε_{ijk} est antisymétrique et $\bar{u}_i \bar{u}_k$ est symétrique : le travail de la force de Coriolis est nul.

avec $e_c = \frac{3}{2} C (\varepsilon L)^{2/3}$, soit $\frac{de_c}{dt} = C \varepsilon^{-1/3} L^{2/3} \frac{d\varepsilon}{dt}$.

d'où l'eq. différentielle $\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{C} \frac{1}{L^{2/3}} \varepsilon^{4/3}$

$$\Rightarrow \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon(t)} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^{4/3}} = -\frac{1}{C} \frac{1}{L^{2/3}} \int_0^t dt \Rightarrow \left[\frac{\varepsilon^{-1/3}}{-1/3} \right]_{\varepsilon_0}^{\varepsilon(t)} = -\frac{t}{CL^{2/3}}$$

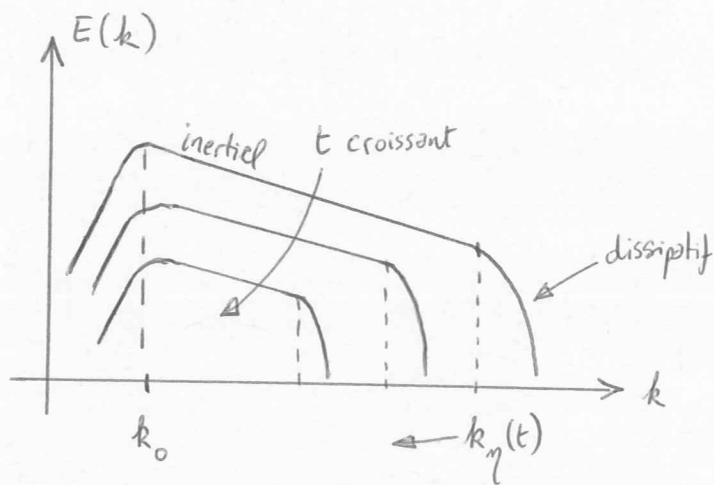
$$\Rightarrow \varepsilon(t)^{-1/3} = \varepsilon_0^{-1/3} + \frac{t}{3CL^{2/3}}, \text{ soit } \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\varepsilon_0^{1/3} t}{3CL^{2/3}} \right)^{-3}$$

d'où $p=3$ et $\tau = \frac{3CL^{2/3}}{\varepsilon_0^{1/3}}$

6°) Puisque $\frac{de_c}{dt} = -\varepsilon$, alors $n = p-1 = 2$

et $k_\eta(t) = \left(\frac{\varepsilon(t)}{\nu^3} \right)^{1/4}$, alors $q = p/4 = 3/4$.

7°)



(en échelles log.)

8°) Le modèle prédit un déclin en t^{-2} , trop rapide par rapport à la réalité, car il suppose $L = \text{cte}$. En réalité, $L(t)$ va croître, ce qui va entraîner un déclin moins rapide.

9°) Lorsque $L k_\eta(T) \approx 1$, on a $Re \approx 1$: il n'y a plus de domaine inertiel. L'énergie des grandes échelles est alors directement dissipée par viscosité, et l'on a

$$e_c(t) \approx e_{c0} e^{-t/\tau_v}, \text{ avec } \tau_v \approx L^2/\nu.$$