

## Examen de Turbulence

Lundi 14 Novembre 2016

Durée : 3 heures - sans document

## 1 Questions de cours

1. Justifiez l'appellation de Quasi-DNS (QDNS) pour une WRLES de turbulence pariétale. Quelle en est la raison physique ?
2. Quelle est la principale différence entre une approche WMLES et une approche WRLES et sa conséquence sur le coût de la simulation ?

## 2 Le modèle de Spalart-Allmaras

Spalart et al. (1997) proposent un modèle hybride RANS-LES basé sur le modèle à une équation de transport pour la pseudo-viscosité turbulente  $\tilde{\nu}$  de Spalart-Allmaras (1992) donnée par:

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \tilde{\nu})}{\partial x_j} = c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] - c_{w1} f_w \left( \frac{\tilde{\nu}}{d_w} \right)^2 \quad (1)$$

où  $d_w$  désigne la distance à la paroi, qui représente l'échelle de longueur RANS du modèle, et  $\tilde{S}$  une mesure scalaire du gradient de vitesse (norme du rotationnel de la vitesse par exemple).

1. Identifier les termes de production et de destruction du modèle RANS.
2. Montrer que sous des hypothèses d'équilibre (*i.e.*  $Production \approx Destruction$ ), le modèle fournit une viscosité turbulente de la forme  $\tilde{\nu} \approx \tilde{S} d_w^2$ .
3. Dans leur modèle hybride, les auteurs proposent de remplacer l'échelle de longueur RANS du modèle par  $\tilde{d} = \min(d_w, C_{DES} \Delta)$  où  $C_{DES} = 0.65$  et  $\Delta$  est une taille représentative du maillage. Ce modèle est appelé DES97 pour Detached Eddy Simulation.  
Expliquer cette appellation en justifiant comment l'approche DES peut être considérée comme une approche hybride RANS/LES.
4. Y a-t-il des limitations à ce modèle DES97? Connaissez vous des améliorations de ce modèle ? Si oui, expliquez les grands principes de leur fonctionnement.
5. Dans le cas du modèle  $k - \varepsilon$  où  $\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ , proposez une formulation DES97 adaptée à ce modèle.

### 3 Approche spectrale du déclin d'une turbulence homogène

**Attention :** dans cet exercice,  $k$  désigne le nombre d'onde, exprimé en  $m^{-1}$ . L'énergie cinétique turbulente par unité de masse, habituellement notée  $k$ , est ici notée  $e_c = \overline{u_i u_i} / 2$ .

On considère une turbulence homogène et isotrope, d'échelle intégrale  $L$  et de vitesse quadratique moyenne selon chacune des 3 directions donnée par  $u'$ . On rappelle le spectre d'énergie de Kolmogorov (loi dite "des 5/3") :

$$E(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3},$$

pour des nombres d'onde  $k$  compris dans l'intervalle  $[k_0, k_\eta]$  (domaine inertiel), avec  $C$  la constante de Kolmogorov, et  $\epsilon$  le taux de dissipation d'énergie par unité de masse.

1. Rappeler (en quelques lignes, avec schéma explicatif) les mécanismes physiques de la cascade d'énergie.
2. On admet que la borne inférieure du domaine inertiel s'écrit  $k_0 = 1/L$ . Proposer par analyse dimensionnelle une expression pour le nombre d'onde de Kolmogorov  $k_\eta$  en fonction de  $\nu$  et  $\epsilon$ . Montrer que l'on a

$$\frac{k_\eta}{k_0} \propto Re^{3/4},$$

où  $Re = u'L/\nu$  est le nombre de Reynolds turbulent.

3. Quel est l'équivalent de la loi des 5/3 pour la fonction de structure d'ordre 2 ?
4. L'énergie cinétique par unité de masse  $de_c$  comprise entre  $k$  et  $k + dk$  est  $E(k)dk$ . En supposant que l'essentiel de l'énergie est compris dans l'intervalle  $[k_0, k_\eta]$ , calculer  $e_c$  en fonction de  $\epsilon$ ,  $k_0$  et  $k_\eta$ . Que devient  $e_c$  dans la limite  $Re \gg 1$  ?
5. Justifier pourquoi, pour une turbulence homogène et isotrope, l'énergie cinétique est nécessairement une fonction décroissante du temps, et qu'elle vérifie l'équation différentielle

$$\frac{de_c}{dt} = -\epsilon(t).$$

Intégrer cette équation différentielle en supposant que  $L$  reste indépendant du temps, et en déduire que la dissipation suit une loi de la forme

$$\epsilon(t) = \epsilon_0(1 + t/\tau)^{-p},$$

où l'on identifiera l'exposant  $p$  (l'expression de  $\tau$  n'est pas demandée).

6. En déduire que l'énergie cinétique et le nombre d'onde  $k_\eta$  évoluent comme

$$e_c(t) = e_{c0}(1 + t/\tau)^{-n}, \quad k_\eta(t) = k_{\eta0}(1 + t/\tau)^{-q},$$

et identifier les exposants  $n$  et  $q$ .

7. Représenter graphiquement l'évolution du spectre d'énergie  $E(k)$  au cours du temps, en faisant bien apparaître le domaine inertiel et le domaine dissipatif.
8. Des mesures expérimentales en soufflerie montrent que le déclin de l'énergie cinétique suit une loi en  $t^{-1.25}$  à temps long. Comment expliquer la différence avec l'exposant  $n$  calculé ici ? Quelle modification faudrait-il apporter à ce modèle pour reproduire une loi de déclin d'énergie plus proche des résultats expérimentaux ?
9. Que pensez-vous de l'instant  $T$  tel que  $Lk_\eta(T) \simeq 1$  ? Expliquer qualitativement comment évolue l'énergie cinétique pour  $t \gg T$ .

## 4 Écoulement de canal plan en référentiel tournant

On s'intéresse à un écoulement turbulent dans un référentiel en rotation à vitesse angulaire constante  $\Omega$ . Si l'écoulement est monophasique et iso-densité ( $\rho = \text{cste}$ ), on admet que la force centrifuge de joue pas de rôle et que seule la force de Coriolis intervient dans la dynamique de l'écoulement. L'équation de Navier-Stokes dans le référentiel tournant s'écrit alors

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + F_i + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (2)$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique, et  $F_i = -2\epsilon_{ijk}\Omega_j u_k$  est la force de Coriolis par unité de masse. On utilise ici l'expression tensorielle de cette force, grâce au tenseur antisymétrique  $\epsilon_{ijk}$  vérifiant

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } i, j, k = 123, 231, 312 \\ -1 & \text{si } i, j, k = 321, 213, 132 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Si l'on suppose que le vecteur rotation du référentiel est donné par  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ , donner les 3 composantes de la force de Coriolis  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$  en fonction de  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ .
2. On introduit la décomposition de Reynolds,  $u_i = \bar{u}_i + u'_i$  et  $p = \bar{p} + p'$ , où l'opérateur  $\bar{\cdot}$  désigne la moyenne d'ensemble. A partir de l'équation (2), en déduire l'équation RANS en référentiel tournant.
3. A partir de cette équation, obtenir l'équation d'évolution pour l'énergie cinétique moyenne  $K = \bar{u}_i \bar{u}_i / 2$ . Expliquer pourquoi cette équation est identique à celle en référentiel non tournant.

On s'intéresse dans toute la suite à l'écoulement entre deux plaques planes parallèles infinies, en  $y = -h$  et  $y = h$ , comme représenté sur la figure 1. L'écoulement moyen est bidimensionnel, statistiquement stationnaire, invariant selon  $x$ , et peut donc s'écrire sous la forme  $\bar{u}_x = f(y)$ ,  $\bar{u}_y = 0$ ,  $\bar{u}_z = 0$ . L'ensemble (fluide et parois) est dans un référentiel tournant défini par le vecteur rotation  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ , avec  $\Omega > 0$ . En l'absence de rotation (a), le profil de vitesse est symétrique entre  $y < 0$  et  $y > 0$ . En présence de rotation (cas b,c,d), le profil se disymétrise, avec une vitesse plus importante du côté de la plaque qui pousse le fluide.

4. Ecrire l'équation RANS en référentiel tournant projetée selon  $y$  en tenant compte des symétries du problème.

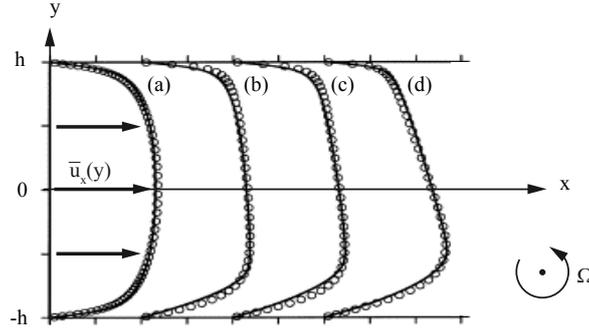


Figure 1: Ecoulement entre deux plaques planes parallèles dans un référentiel tournant à vitesse angulaire  $\Omega$ . Les profils de vitesses expérimentaux sont obtenus à vitesse angulaire  $\Omega$  croissante, avec  $\Omega = 0$  pour le cas (a).

5. Intégrer cette équation, et montrer que la pression peut s'écrire sous la forme

$$\bar{p}(x, y) = p_0(x) - \rho \overline{u_y'^2}(y) - 2\rho\Omega \int_0^y \bar{u}_x(y) dy. \quad (3)$$

6. En déduire qu'entre les deux parois il doit exister une différence de pression  $\Delta p$ , que l'on exprimera en fonction de la vitesse débitante  $u_m$  (vitesse moyennée sur l'épaisseur  $y$ ) et des données du problème.

7. A partir de l'équation RANS en référentiel tournant, montrer que

$$\tau_{tot}(y) - \tau_{tot}(0) = y \frac{\partial p_0}{\partial x}, \quad (4)$$

où  $\tau_{tot}(y)$  est la contrainte totale (visqueuse et turbulente).

8. Pour  $\Omega = 0$ , que vaut  $\overline{u_x' u_y'}$  en  $y = 0$  ? (justifier). Pour comprendre ce que devient ce résultat pour  $\Omega > 0$ , on considère une particule fluide située légèrement sous la ligne médiane (en  $y < 0$ ), subissant une fluctuation turbulente  $u_y' > 0$  qui la transporte légèrement au-dessus de la ligne médiane (en  $y > 0$ ). En raisonnant qualitativement sur l'effet de la force de Coriolis, que pouvez-vous en déduire sur le signe de  $\overline{u_x' u_y'}$  en  $y = 0$  ?

9. Les composantes  $\overline{u_x' u_z'}$  et  $\overline{u_y' u_z'}$  sont-elles modifiées par la rotation du référentiel ?

10. **On pourra admettre ce résultat** : Si  $\Omega$  est très grand, les fluctuations turbulentes sont dominées par la force de Coriolis. Montrer que dans ce cas on a

$$\overline{u_x' u_y'} \simeq 2\Omega u^* \ell_m,$$

où  $u^*$  est l'ordre de grandeur des fluctuations turbulentes, et  $\ell_m$  la taille caractéristique des mouvements turbulents ("longueur de mélange").

11. En faisant une hypothèse de viscosité turbulente, en déduire que le profil de vitesse, au voisinage du centre ( $y \simeq 0$ ), vérifie

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \simeq -2\Omega.$$

Ce résultat est-il conforme à la figure 1 ?