

## Examen de Turbulence

Mercredi 18 Novembre 2015

Durée : 3 heures - sans document

### 1 Questions de cours

1. Décrire en une phrase (sans équation) chacune des notions suivantes: DNS, LES, RANS, méthode hybride RANS/LES.
2. Justifiez l'appellation de Quasi-DNS (QDNS) pour une LES de turbulence pariétale. Quelle en est la raison physique?
3. Quelle est la principale différence entre une approche WMLES et une approche WRLES.
4. Quels sont les principaux mécanismes physiques qui pilotent le bilan d'énergie cinétique turbulente dans la sous-couche linéaire d'une couche limite turbulente?
5. Qu'est ce que la loi de Moore?

### 2 Modèle hybride RANS/LES

Speziale (1997) propose le modèle hybride RANS/LES suivant  $\tau = \left(1 - \exp\left(-\frac{\beta\Delta}{L_K}\right)\right)^n \cdot \tau_{RANS}$ , où  $\Delta$  et  $L_K$  désignent respectivement une échelle caractéristique de la maille et l'échelle de Kolmogorov, et  $\beta$  et  $n$  sont deux constantes.

1. Expliquer en quoi ce modèle peut être considéré comme un modèle hybride. Discuter et interpréter les cas  $\frac{\Delta}{L_K} \rightarrow 0$  et  $\frac{\Delta}{L_K} \rightarrow \infty$ .
2. Comment se comporte ce modèle dans le cas  $Re \rightarrow \infty$ ?

### 3 Jet turbulent

On s'intéresse à un jet turbulent plan, statistiquement stationnaire, issu d'une fente de largeur  $D$  et de vitesse  $U_0$ . On note  $x$  la direction du jet, et  $z$  la direction perpendiculaire au plan de la figure. On introduit la décomposition de Reynolds  $(u_x, u_y, u_z) = (\bar{u}_x, \bar{u}_y, 0) + (u'_x, u'_y, u'_z)$ . Le champ de vitesse moyen  $\bar{u}_x(x, y)$  est représenté en Fig. 1a, et une visualisation par injection de colorant en Fig. 1b. La visualisation laisse apparaître des tourbillons en champ proche, sur une distance  $x$  de l'ordre de  $5D$ .

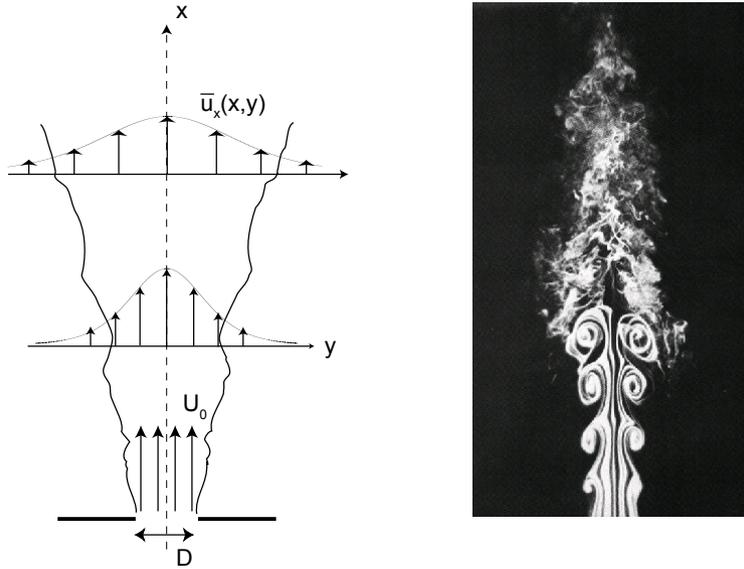


Figure 1: (a) Jet turbulent. (b) Visualisation par injection de colorant.

1. Rappeler l'expression des tenseurs de taux de déformation  $s_{ij}$  et de taux de rotation  $\omega_{ij}$ . Quelles composantes de ces tenseurs sont utiles pour décrire ces tourbillons ? Représenter où ces composantes de tenseur prennent des valeurs significatives dans la région en champ proche. Pour le tenseur de taux de déformation, représenter également les directions propres et leur signe.
2. On considère des fluctuations de vorticité longitudinale (selon  $x$ ) situées entre deux tourbillons corotatifs consécutifs. Expliquer par quel mécanisme cette vorticité longitudinale va être amplifiée (5 à 10 lignes d'explication avec schémas clairs).

Au-delà de  $x/D \simeq 8$ , la turbulence dans le jet est dite "pleinement développée" : les structures tourbillonnaires de champ proche ne sont plus directement visibles. On réalise des mesures par PIV (vélocimétrie par images de particules) des fluctuations turbulentes, afin de calculer les différentes composantes du tenseur de Reynolds. Les mesures de  $\overline{u_x'^2}$ ,  $\overline{u_y'^2}$  et  $\overline{u_x' u_y'}$  sont représentées en Fig. 2.

3. Parmi les 9 composantes de  $\overline{u_i' u_j'}$ , lesquelles sont nulles, et pourquoi ? Combien de composantes non nulles indépendantes définissent ce tenseur ?
4. Proposez une valeur approximative pour l'énergie cinétique turbulente normalisée  $k/U_0^2$  en  $x = 8D$ ,  $y = 0$  ?
5. Tracer les profils de  $\overline{u_x'^2}$ , de  $\overline{u_y'^2}$  et de  $\overline{u_x' u_y'}$  en fonction de  $y$  pour  $x = 8D$ , et expliquer physiquement le signe de  $\overline{u_x' u_y'}$  en  $y = 0$  et en  $y \simeq D$ .
6. Tracer l'allure du terme de production d'énergie cinétique turbulente,  $P = -\overline{u_i' u_j'} \partial \bar{u}_i / \partial x_j$  en fonction de  $y$ . Où la production d'énergie cinétique est-elle la plus forte et pourquoi ?

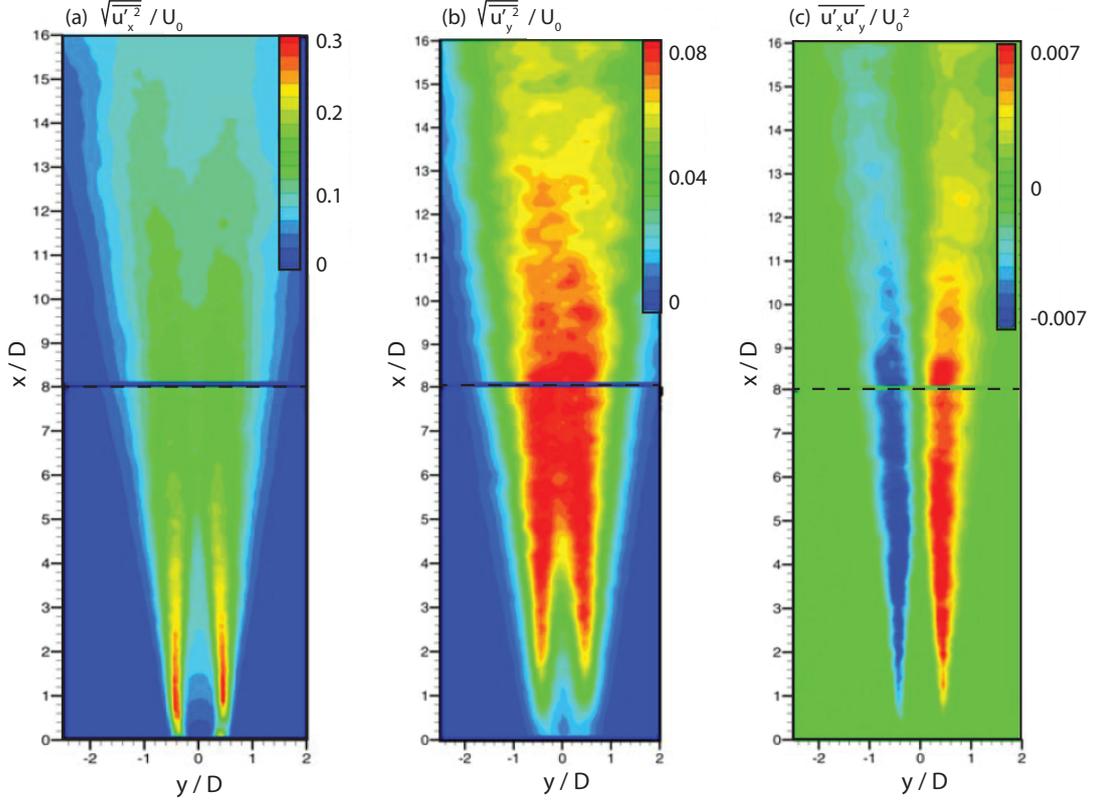


Figure 2: Cartographie, mesurée par PIV, de 3 composantes du tenseur de contrainte de Reynolds dans le turbulent (D'après Mi, Kalt, Nathan et Wong, Experiments in Fluids 2007).

#### 4 Modèle $k - \ell$ pour un écoulement cisailé homogène

On rappelle que le modèle  $k - \epsilon$  est construit à partir d'une viscosité turbulente,  $\nu_t = c_\mu k^2 / \epsilon$ , et de deux équations de transport empiriques pour l'énergie cinétique turbulente  $k = \overline{u_i' u_i'} / 2$  et le taux de dissipation d'énergie turbulente  $\epsilon$ ,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) k = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P - \epsilon,$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \epsilon = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + c_1 \frac{P\epsilon}{k} - c_2 \frac{\epsilon^2}{k}.$$

où  $P = (\tau_{ij}^R / \rho) \bar{s}_{ij} > 0$  est le terme de production des fluctuations turbulentes, et  $\tau_{ij}^R$  le tenseur de Reynolds. Les valeurs des 5 constantes du modèle,  $c_\mu$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\sigma_k$  et  $\sigma_\epsilon$ , sont de l'ordre de l'unité.

Dans cet exercice on souhaite développer un modèle alternatif, en simplifiant le modèle  $k - \epsilon$ . On construit ce modèle simplifié sur la base d'une viscosité turbulente  $\nu_t$  exprimée en fonction de 2 quantités : l'énergie cinétique turbulente  $k$  et une échelle de longueur  $\ell$  caractéristique des structures turbulentes.

1. En raisonnant par analyse dimensionnelle, donner l'expression de la viscosité turbulente en fonction de  $k$  et  $\ell$ . On nommera  $c_\ell$  la constante numérique qui apparaît dans cette expression (que l'on supposera de l'ordre de 1).
2. En raisonnant toujours par analyse dimensionnelle, donner l'expression de la dissipation d'énergie (par unité de masse)  $\epsilon$  en fonction de  $k$  et  $\ell$ . On nommera  $c_\epsilon$  la constante numérique (que l'on supposera également de l'ordre de 1).

On souhaite tester le modèle  $k-\ell$  dans le cas d'un écoulement turbulent cisailé homogène de la forme  $\bar{u}_x(y) = Sy$ , où  $S$  est le taux de cisaillement. On suppose que ce taux de cisaillement est maintenu constant par des conditions aux limites adaptées, que l'on ne considère pas ici.

3. En utilisant la relation qui lie le tenseur de Reynolds au tenseur de déformation moyenne, montrer que le terme de production s'écrit  $P = \nu_t S^2$ .
4. Montrer que l'équation d'évolution pour  $k$  devient alors

$$\frac{dk}{dt} = c_\ell k^{1/2} \ell S^2 - c_\epsilon \frac{k^{3/2}}{\ell}.$$

Que vaut l'énergie cinétique turbulente  $k^*$  en régime stationnaire ?

5. On envisage deux conditions initiales différentes : (a)  $k(0) = 0$ ; (b)  $k(0) \gg k^*$ . Dans chacun des cas, montrer que l'équation différentielle peut se simplifier à temps court, et en déduire l'expression approchée de  $k(t)$ .
6. Tracer qualitativement l'évolution temporelle de  $k(t)$  dans les 2 cas (a) et (b), en mettant en évidence le comportement à temps court et le comportement asymptotique.

## 5 Approche spectrale du déclin d'une turbulence homogène

**Attention :** dans cet exercice,  $k$  désigne le nombre d'onde, exprimé en  $m^{-1}$ . L'énergie cinétique turbulente par unité de masse, habituellement notée  $k$ , est ici notée  $e_c = \bar{u'_i u'_i} / 2$ .

On rappelle la loi des 5/3 de Kolmogorov, qui exprime le spectre d'énergie d'une turbulence homogène et isotrope,

$$E(k) = C \epsilon^{2/3} k^{-5/3},$$

pour  $k$  compris dans l'intervalle  $[k_0, k_\eta]$  (domaine inertiel).  $C$  est la constante de Kolmogorov, et  $\epsilon$  le taux de dissipation d'énergie par unité de masse.

1. Quel est l'équivalent de la loi des 5/3 pour la fonction de structure d'ordre 2 ?
2. Représenter  $E(k)$  en fonction de  $k$ , en faisant bien apparaître le domaine inertiel, le domaine dissipatif, et le domaine des grandes échelles.
3. L'énergie cinétique par unité de masse  $de_c$  comprise entre  $k$  et  $k + dk$  est  $E(k)dk$ . En supposant que l'essentiel de l'énergie est compris dans l'intervalle  $[k_0, k_\eta]$ , calculer l'énergie cinétique par unité de masse  $e_c$  en fonction de  $\epsilon$ ,  $k_0$  et  $k_\eta$ .

4. On admet que la borne inférieure du domaine inertiel s'écrit  $k_0 = 1/L$ , où  $L$  est l'échelle intégrale. Proposer par analyse dimensionnelle une expression pour le nombre d'onde de Kolmogorov  $k_\eta$ .

5. Montrer que l'on a

$$\frac{k_\eta}{k_0} \propto Re^{3/4},$$

où  $Re = u'L/\nu$  est le nombre de Reynolds turbulent. Dans la limite  $Re \gg 1$ , on peut donc négliger la contribution de  $k_\eta$  dans l'expression de  $e_c$ . Que devient  $e_c$  ?

6. Pour une turbulence homogène en déclin,  $e_c$  et  $\epsilon$  deviennent des fonctions du temps, qui vérifient l'équation différentielle

$$\frac{de_c}{dt} = -\epsilon(t).$$

Intégrer cette équation différentielle en supposant que  $L$  est indépendant du temps, et en déduire que la dissipation suit une loi de la forme

$$\epsilon(t) = \epsilon_0(1 + t/\tau)^{-p},$$

où l'on identifiera l'exposant  $p$  (l'expression de  $\tau$  n'est pas demandée).

7. En déduire que l'énergie cinétique suit une loi de la forme

$$e_c(t) = e_{c0}(1 + t/\tau)^{-n},$$

où l'on identifiera de même l'exposant  $n$ .

8. Des mesures expérimentales en soufflerie montrent que le déclin de l'énergie cinétique suit une loi en  $t^{-1.25}$  à temps long. Comment expliquer la différence avec l'exposant  $n$  calculé ici ? Quelle modification faudrait-il apporter à ce modèle pour reproduire une loi de déclin d'énergie plus proche des résultats expérimentaux ?