

Examen de Turbulence, physique et modélisation

Mardi 15 Décembre 2009

Durée : 3 heures - sans document

Exercice 1 : Modèle $k - \ell$ pour un écoulement cisailé homogène

On souhaite développer un modèle de turbulence de type viscosité turbulente, en simplifiant le modèle classique “à 2 équations” $k - \epsilon$ (rappelé dans l’annexe ci-dessous). On construit ce modèle simplifié sur la base d’une viscosité turbulente ν_t exprimée en fonction de 2 quantités : l’énergie cinétique turbulente (par unité de masse) k et une échelle de longueur ℓ caractéristique des structures turbulentes. On va simplement reprendre l’équation d’évolution pour k issue du modèle $k - \epsilon$, mais on considère en revanche que ℓ est une constante fixée : il s’agit donc d’un modèle “à 1 équation”.

1. En raisonnant par analyse dimensionnelle, donner l’expression de la viscosité turbulente en fonction de k et ℓ . On nommera c_ℓ la constante numérique qui apparaît dans cette expression (que l’on supposera de l’ordre de 1).
2. En raisonnant toujours par analyse dimensionnelle, donner l’expression de la dissipation d’énergie (par unité de masse) ϵ en fonction de k et ℓ . On nommera c_ϵ la constante numérique (que l’on supposera également de l’ordre de 1).
3. Que devient l’équation d’évolution pour k dans le cas d’une turbulence homogène et isotrope en déclin ? Intégrer cette équation différentielle, et montrer que l’on a $k(t) \propto t^{-2}$ à temps long.
4. En réalité, la loi de déclin d’une turbulence homogène et isotrope est telle que $k(t) \propto t^{-n}$ avec $1 < n < 2$. Quelle hypothèse vous semble en défaut dans le modèle $k - \ell$?

On souhaite tester le modèle $k - \ell$ dans le cas d’un écoulement turbulent cisailé homogène de la forme $\bar{u}_x(y) = Sy$, où S est le taux de cisaillement. On suppose que ce taux de cisaillement est maintenu constant par des conditions aux limites adaptées, que l’on ne considère pas ici.

5. Exprimer le terme de production P en fonction de S et d’une composante du tenseur de Reynolds. En utilisant la relation qui lie le tenseur de Reynolds au tenseur de déformation moyenne, en déduire que l’on a $P = \nu_t S^2$.
6. Montrer que l’équation d’évolution pour k devient alors

$$\frac{dk}{dt} = c_\ell k^{1/2} \ell S^2 - c_\epsilon \frac{k^{3/2}}{\ell}.$$

7. Calculer l'énergie cinétique turbulente k^* en régime stationnaire.
8. On envisage deux conditions initiales différentes : (a) $k(0) = 0$; (b) $k(0) \gg k^*$. Dans chacun des cas, montrer que l'équation différentielle peut se simplifier à temps court, et en déduire l'expression approchée de $k(t)$.
9. Tracer qualitativement l'évolution temporelle de $k(t)$ dans les 2 cas (a) et (b), en mettant en évidence le comportement à temps court et le comportement asymptotique.

Annexe : Le modèle $k - \epsilon$

On rappelle que le modèle $k - \epsilon$ est construit à partir d'une viscosité turbulente, $\nu_t = c_\mu k^2 / \epsilon$, et de deux équations de transport empiriques pour l'énergie cinétique turbulente $k = \overline{u'_i u'_i} / 2$ et le taux de dissipation d'énergie turbulente ϵ ,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) k = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P - \epsilon,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \epsilon = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + c_1 \frac{P \epsilon}{k} - c_2 \frac{\epsilon^2}{k}.$$

où $P = (\tau_{ij}^R / \rho) \overline{s}_{ij} > 0$ est le terme de production des fluctuations turbulentes, et τ_{ij}^R le tenseur de Reynolds. Les valeurs des 5 constantes du modèle, c_μ , c_1 , c_2 , σ_k et σ_ϵ , sont déterminées à partir de données expérimentales.

Exercice 2 : Contraction d'une soufflerie pour la production d'une turbulence isotrope

Afin de produire une turbulence homogène et isotrope en soufflerie, il est classique de disposer une grille en amont de la section d'essai. Cependant, la mesure des variances des fluctuations selon chacune des directions, $\overline{u'^2_\alpha}$ (avec $\alpha = x, y, z$), montre que la turbulence ainsi produite n'est pas tout à fait isotrope (cf. figure 1a). En effet, on observe

$$\overline{u'^2_x} \simeq 1.2 \overline{u'^2_y} \simeq 1.2 \overline{u'^2_z}.$$

Afin de remédier à ce défaut d'isotropie, Comte-Bellot et Corrsin (1966) ont proposé d'introduire une diminution de la section de la soufflerie en aval de la grille (cf. figure 1b). On suppose que la section est carrée, et passe d'une aire Σ_0 à $\Sigma_1 < \Sigma_0$ sur une distance δ . La vitesse moyenne après la contraction est donc de $U_1 = U_0 \Sigma_0 / \Sigma_1 > U_0$. Nous allons estimer le taux de contraction Σ_1 / Σ_0 nécessaire pour un retour à l'isotropie.

On rappelle l'équation d'évolution pour la vorticité,

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \omega_i,$$

où $D/Dt = \partial/\partial t + u_j \partial/\partial x_j$ est la dérivée lagrangienne (prise en suivant une particule fluide le long de sa trajectoire).

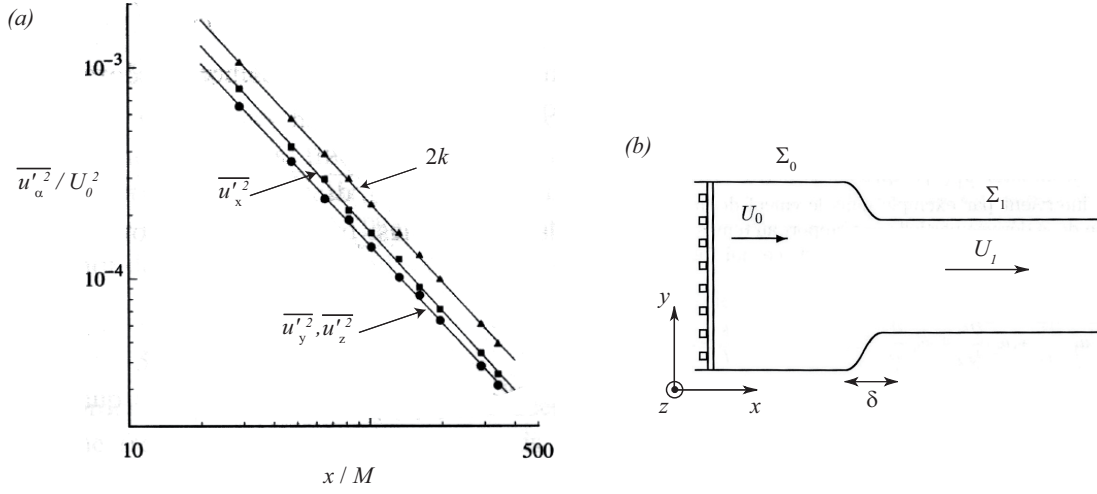


Figure 1: (a) Les 3 contributions à l'énergie cinétique turbulente $k = (\overline{u_x'^2} + \overline{u_y'^2} + \overline{u_z'^2})/2$ en aval d'une grille en soufflerie. (b) Schéma d'une contraction de la section de la soufflerie en aval de la grille pour corriger le défaut d'isotropie.

1. On souhaite dans un premier temps estimer le défaut d'isotropie sur les variances de la vorticité $\overline{\omega_\alpha'^2}$ (avec $\alpha = x, y, z$). Pour cela, on suppose que l'ordre de grandeur des dérivées spatiales se déduit simplement de celui des différences finies prises sur la distance η (échelle de Kolmogorov). En déduire que l'on a

$$\overline{\omega_y'^2} \simeq \overline{\omega_z'^2} \simeq 1.1 \overline{\omega_x'^2}.$$

Afin de réduire le défaut d'isotropie, il va donc être nécessaire d'augmenter $\overline{\omega_x'^2}$.

2. On suppose que le gradient de vitesse axial moyen $\gamma = \partial \overline{u_x} / \partial x$ subi par une particule fluide au centre de la soufflerie le long de sa trajectoire est constant dans la zone de contraction. En déduire l'expression de γ en fonction de U_0 , U_1 et δ .
3. Exprimer le tenseur de déformation moyen $\overline{s}_{ij}$ (partie symétrique du tenseur des gradients de vitesse), dans la base (x, y, z) , au centre de la soufflerie, dans la zone de contraction, en fonction de γ . Quelles sont les directions propres de ce tenseur, et les valeurs propres associées ? Que vaut le tenseur $\overline{\omega}_{ij}$ (partie antisymétrique) ?
4. Ecrire l'équation d'évolution temporelle de la composante x de la vorticité d'une particule fluide au centre de la soufflerie en fonction de γ . En déduire $\omega_x(t)$ à partir d'une condition initiale quelconque donnée $\omega_x(0)$ (on néglige l'effet de la viscosité).
5. En supposant qu'une particule fluide passe un temps $\tau \simeq \delta/U_0$ dans la zone de contraction, calculer le taux de contraction Σ_1/Σ_0 nécessaire pour que la condition d'isotropie soit vérifiée en sortie de la zone de contraction.

Exercice 3 : Dimensionnement d'un maillage pour DNS

On considère l'écoulement au voisinage d'un avion de ligne, d'envergure $L = 40 \text{ m}$ et de vitesse moyenne $U = 900 \text{ km/h}$. Le mouvement de l'avion met en mouvement les masses d'air environnantes sur une distance typique de l'ordre de L , que l'on considère être la taille des plus grands tourbillons. On suppose que la vitesse caractéristique de ces plus gros tourbillons est $u'_L \simeq 0,1U$. On note $\text{Re} = UL/\nu$ le nombre de Reynolds, avec $\nu = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ la viscosité cinématique de l'air.

1. Rappeler en quelques mots la notion de cascade d'énergie. Rappeler en particulier l'expression de l'ordre de grandeur des fluctuations de vitesse u'_r à une échelle r en fonction de r et du taux de dissipation d'énergie par unité de masse ϵ .
2. Calculer le taux de transfert d'énergie ϵ en fonction des grandes échelles de l'écoulement, L et u'_L . En déduire l'ordre de grandeur de la puissance P fournie par les réacteurs en fonction de ϵ , L et de la densité de l'air (Application numérique, avec $\rho = 1,2 \text{ Kg/m}^3$).
3. On suppose que le temps de transfert d'énergie cinétique τ_r entre tourbillons de taille voisine et d'échelle r s'écrit en fonction de la taille r et de la vitesse caractéristique u'_r des tourbillons uniquement. Écrire τ_r en fonction de r et ϵ .
4. Montrer que, pour des tourbillons de taille suffisamment importante, ce temps de transfert est bien plus petit que le temps de diffusion visqueuse $\tau_v = r^2/\nu$ à la même échelle. Montrer que l'échelle pour laquelle ces deux temps sont du même ordre de grandeur est l'échelle de Kolmogorov η . Estimer l'ordre de grandeur de cette échelle. Que devient l'énergie cinétique des tourbillons de taille η ?
5. Pour réaliser une simulation numérique directe (DNS) de l'écoulement au voisinage de l'avion, il faut une grille de calcul dont la taille soit de l'ordre de L , et dont la maille soit de l'ordre de grandeur des plus petits tourbillons, c'est-à-dire de η . Montrer que le nombre de mailles nécessaire à cette simulation croît comme $\text{Re}^{9/4}$.
6. Pour être réaliste, on doit simuler l'écoulement pendant au moins un temps de retournement des plus grands tourbillons, soit $T \simeq L/u'_L$. Estimer le nombre de pas de temps de la simulation T/τ_η (où τ_η est l'échelle de temps de diffusion τ_v des plus petits tourbillons de taille η). En déduire que le nombre d'opérations élémentaires de la simulation varie comme $\text{Re}^{11/4}$.
7. Aujourd'hui, les super-ordinateurs les plus puissants atteignent 10^{12} opérations par seconde (flops). Quel nombre de Reynolds est-il possible de simuler si l'on dispose de 100 h de calcul ? Cela vous semble-t-il suffisant ? De combien de temps de calcul faudrait-il disposer pour effectuer une simulation réaliste de notre écoulement ?