Université Paris-Sud **Année 2008-09**
Master 2 de Mécanique-Physique

Examen de Turbulence, physique et modélisation

Mardi 16 Décembre 2008

Durée : 3 heures - sans document

Exercice 1 : Questions de cours

1. On souhaite réaliser la simulation numérique d'un écoulement au voisinage d'un rétroviseur de voiture, à une vitesse de 130 km/h. On souhaite notamment étudier les problèmes de génération de bruit acoustique dans cette configuration. Parmi les différentes approches – DNS, RANS et LES –, justifier la ou les méthodes qui vous semble(nt) adaptée(s) à cette étude (argumentez en quelques lignes pour chaque méthode).

2. On considère un écoulement turbulence quasi-parallèle, décrit par un profil de vitesse moyen $\overline{u}_x(y)$ présentant un maximum en y_m. On observe que la contrainte de Reynolds τ^R_{xy} s'annule en un point $y_0 \neq y_m$. Une modélisation du type "longueur de mélange" vous semble-t-elle adaptée pour décrire un tel écoulement ? (quelques lignes de justification).

Exercice 2 : Couche limite turbulente

On considère une couche limite turbulente statistiquement stationnaire sur une plaque plane, avec x la direction de l'écoulement et y la distance à la paroi (figure 1). On considère pour simplifier l'écoulement comme invariant par translation selon x (vérifié seulement sur une gamme de x restreinte), et que la vitesse moyenne est strictement horizontale.

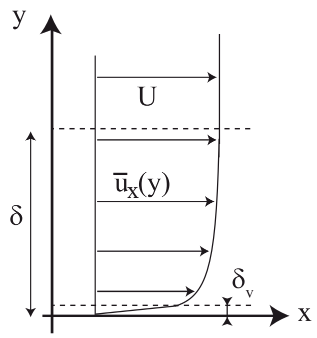

Figure 1: Schéma d'une couche limite turbulente.

On introduit la vitesse de friction $u^* = (\tau_0/\rho)^{1/2}$ construite à partir de la contrainte pariétale τ_0, ainsi que l'épaisseur la sous-couche visqueuse $\delta_v = \nu/u^*$. Le profil de vitesse dans la couche limite peut se décrire par ces 2 lois,

$$\overline{u}_x(y) = u^* \frac{y}{\delta_v}, \qquad \text{pour} \qquad y/\delta_v < 10$$

$$\overline{u}_x(y) = u^* \left(\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{\delta_v}\right) + A \right), \qquad \text{pour} \qquad y/\delta_v > 20$$

1. Tracer, en coordonnées logarithmique-linéaire, le profil de vitesse, en faisant apparaître les 2 lois.

2. Exprimer le tenseur de gradient de vitesse $\partial \overline{u}_i / \partial x_j(y)$ sous forme matricielle, dans la base (x, y, z). Indiquer la composante non nulle de ce tenseur, que l'on notera $S(y)$.

3. On se place à une distance y fixée arbitraire, dans la zone logarithmique ($y/\delta_v > 20$), et l'on suppose $S(y)$ localement constante, $S(y) = S_0$. Exprimer S_0 en fonction de κ, y et u^*.

4. On décompose $\partial \overline{u}_i / \partial x_j$ en une partie symétrique, $\overline{s}_{ij}$, et une partie antisymétrique, $\overline{\omega}_{ij}$. Exprimer ces deux tenseurs sous forme matricielle en fonction de S_0.

5. Indiquer quelles sont les valeurs propres et vecteurs propres du tenseur de déformation moyen $\overline{s}_{ij}$, et représenter graphiquement les directions de ces vecteurs propres.

On rappelle que le modèle $k - \epsilon$ est construit à partir d'une viscosité turbulente, ν_t, et de deux équations de transport pour l'énergie cinétique turbulente $k = \frac{1}{2}\overline{u'_i u'_i}$ et le taux de dissipation d'énergie turbulente $\epsilon = 2\nu \overline{s'_{ij} s'_{ij}}$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) k = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P - \epsilon,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \epsilon = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + c_1 \frac{P\epsilon}{k} - c_2 \frac{\epsilon^2}{k}.$$

où $P = (\tau^R_{ij}/\rho)\overline{s}_{ij} > 0$ est le terme de production des fluctuations turbulentes et $\tau^R_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$ est le tenseur de Reynolds.

6. Réécrire l'équation pour l'énergie cinétique turbulence k compte tenu des propriétés de l'écoulement (invariances).

7. Des expériences montrent que, dans la région logarithmique, le tenseur de Reynolds est approximativement indépendant de y, et que ses composantes valent

$$\tau^R_{ij} = -\rho u^{*2} \begin{pmatrix} 4.4 & -1 & 0 \\ -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.2 \end{pmatrix}$$

   Justifier pourquoi certaines composantes de cette matrice sont nulles.

8. Exprimer k, P et ϵ, en fonction de u^*, et éventuellement y et κ.

9. En utilisant la relation entre τ_{ij}^R et $\overline{s}_{ij}$ faisant intervenir ν_t, en déduire l'expression de $\nu_t(y)$ en fonction de κ, u^* et y. Si l'on écrit $\nu_t = u^* l_m(y)$, que vaut la longeur de mélange $l_m(y)$? Justifiez physiquement ce résultat.

10. Rappeler, dans le cadre du modèle $k - \epsilon$, l'expression de la viscosité turbulence ν_t en fonction de k, ϵ et de la constante sans dumension c_μ. En déduire la valeur numérique de c_μ.

Exercice 3 : Dispersion turbulente

On s'intéresse à la dispersion d'un nuage polluant dans l'atmosphère. Pour cela, on va étudier la loi de séparation entre 2 particules advectées par un écoulement turbulent. Pour simplifier, on considère dans ce problème que les propriétés statistiques de la turbulence atmosphérique sont comparables à celles de la turbulence isotrope tridimensionnelle. On considère une vitesse moyenne du vent de $U = 200$ km/h, un taux de turbulence de $u'/U \simeq 30$ %, une échelle caractéristique de longueur de $L = 1000$ km, et une viscosité cinématique de $\nu = 2 \times 10^{-4}$ m^{2}s^{-1}.

1. Rappeler la loi de Kolmogorov exprimant l'ordre de grandeur des fluctuations de vitesse u'_r en fonction de l'échelle r et du taux de dissipation d'énergie ϵ. Justifier en quelques lignes les mécanismes physiques permettant d'obtenir cette loi. Rappeler la gamme d'échelle r sur laquelle cette loi est valide.

2. Avec une vitesse moyenne du vent de $U = 200$ km/h, et un taux de turbulence de $u'/U \simeq 30$ %, estimer l'ordre de grandeur de ϵ, et de l'échelle de Kolmogorov η.

On appelle $\vec{r}_1(t)$ et $\vec{r}_2(t)$ la position de deux particules 1 et 2. Chaque particule suit *passivement* l'écoulement, c'est-à-dire qu'elle est advectée à chaque instant par la valeur instantanée $\vec{v}(\vec{x}, t)$ du vecteur vitesse à l'endroit où elle se trouve :

$$\frac{d}{dt}\vec{r}_n = \vec{v}(\vec{x} = \vec{r}_n(t), t), \qquad n = 1, 2. \tag{1}$$

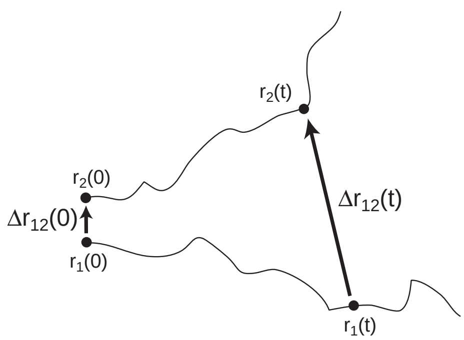

Figure 2: Distance relative entre deux particules advectées par un écoulement turbulent.

3. En combinant l'équation (1) pour $n = 1$ et 2, écrire l'équation d'évolution pour la distance $\Delta\vec{r}_{12}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$. Que vaut la moyenne $\overline{\Delta\vec{r}_{12}(t)}$?

4. Ecrire l'équation d'évolution pour la variance de la séparation $\overline{\Delta\vec{r}_{12}(t)^2}$.

5. On fait l'hypothèse que les fluctuations de vitesse sont corrélées à la séparation $\Delta\vec{r}_{12}$ de la manière suivante :
$$\overline{\Delta\vec{r}_{12} \cdot \Delta\vec{v}_{12}} = \alpha R' \, u'_R,$$
où $R'(t) = \sqrt{\overline{\Delta\vec{r}_{12}(t)^2}}$ est la valeur quadratique moyenne, u'_R les fluctuations de vitesse à l'échelle $r = R$ selon la relation de Kolmogorov, et $\alpha \simeq 0.4$ un coefficient de corrélation. En déduire l'équation différentielle vérifiée par R'^2.

6. En posant $y = R'^2$, intégrer cette équation différentielle. On prendra comme séparation initiale caractéristique $R'(0) = R'_0$, supposée supérieure à η. En déduire, à temps suffisamment long, la loi de Richardson
$$R'(t) \propto t^{3/2}, \qquad t \gg t_0 \tag{2}$$
Cette loi tient-elle toujours aux temps très longs ?

7. Calculer la séparation typique de deux particules de fluide, initialement très proches, au bout de 1 heure ou 1 jour, et la comparer à la distance moyenne parcourue par ces particule pendant le même temps.