

Physique non linéaire

TP : Cascade sous-harmonique et attracteur étrange

Introduction

Dans ce TP numérique, on s'intéresse à deux systèmes dynamiques présentant une transition vers le chaos par une série de bifurcations successives. Un système dynamique est usuellement décrit par une équation d'évolution, de la forme

$$dX/dt = F_r(X), \quad (1)$$

où la fonction F_r peut dépendre d'un paramètre de contrôle r . Dans le cas le plus simple, la variable $X(t)$ peut être une quantité scalaire, par exemple la position d'une masse, ou l'angle d'un pendule. Dans le cas général, cette quantité est un vecteur, de la forme $(x(t), y(t) \dots)$, décrivant l'état du système à l'instant t . Si l'on choisit par exemple $y = dx/dt$, alors le vecteur $X(t)$ décrit le système dans l'espace des phases.

L'évolution temporelle de $X(t)$ pouvant être très lente à calculer numériquement, il peut être intéressant d'introduire une discrétisation (ou "stroboscopie") du problème : On remplace la variable continue $X(t)$ par une suite $\{X_n\}$, définie par :

$$X_n = X(t_0 + n\tau)$$

avec τ le pas de temps de la discrétisation. Cette opération revient à ne considérer la valeur de $X(t)$ que pour des valeurs du temps régulièrement espacées de τ . Dans l'exemple de la figure 1, τ a été choisi judicieusement, de sorte que la périodicité de $X(t)$ se retrouve dans celle de $\{X_n\}$ (on a ici : $X_{n+2} = X_n$).

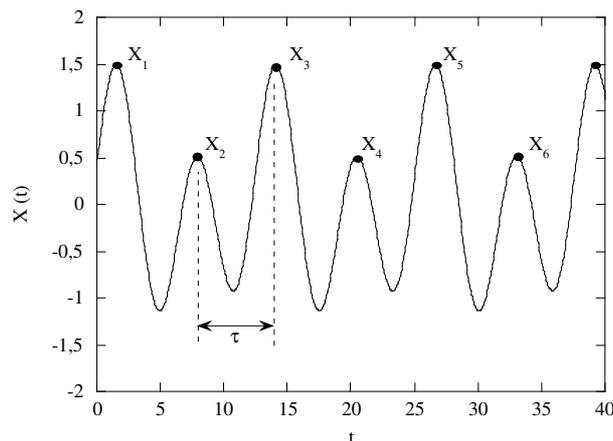


Figure 1: Discrétisation d'une variable continue.

Une telle opération de discrétisation, lorsqu'elle est possible, permet de remplacer l'équation du mouvement continue (1) par une suite récurrente, de la forme

$$X_{n+1} = f_r(X_n),$$

beaucoup plus facile à simuler numériquement.

Dans ce TP, il s'agira d'étudier le comportement de deux suites récurrentes de ce type : L'application logistique (à 1 dimension) et l'application de Hénon (à 2 dimensions). En fonction de la valeur du paramètre de contrôle r , les suites pourront être stationnaires ($X_n = cste$), périodique de période N ($X_{n+N} = X_n$) ou encore chaotique. Nous chercherons à caractériser les bifurcations d'un régime à un autre, et à décrire la nature du régime chaotique.

Partie I : L'application logistique

On considère la suite récurrente

$$x_{n+1} = f_r(x_n) = rx_n(1 - x_n),$$

où $x_n \in [0, 1]$, et $r \geq 0$ le paramètre de contrôle. La condition initiale x_0 est fixée entre 0 et 1.

On appelle *point fixe* x^* d'une suite une valeur telle $f(x^*) = x^*$, c'est-à-dire telle que les itérés successifs restent constants, $x_{n+1} = x_n$.

Le **Théorème du point fixe** établit qu'un point fixe x^* est stable si $|f'(x^*)| < 1$. Dans ce cas, la suite $\{x_n\}$ converge vers x^* pour toute condition initiale x_0 dans le voisinage de x^* . Dans le cas contraire, le point fixe x^* est instable.

Ce théorème équivaut, dans le cas discret, à la stabilité d'une position d'équilibre dans le cas continu.

Préliminaires

1. Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f pour $0 \leq r \leq 4$ (c'est-à-dire que $f(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \in [0, 1]$).
2. Calculer le(s) point(s) fixe(s) x^* de la suite $\{x_n\}$, et en discuter la stabilité en fonction de r . Tracer x^* en fonction de r .

Etude numérique de la suite

3. A partir d'une condition initiale $x_0 \in]0, 1[$ de votre choix, étudier numériquement à l'aide d'Excel la suite $\{x_n\}$. Par exemple, pour $x_0 = 0.1$ et $r = 2$, on pourra écrire :

$$\begin{aligned} A1 &= 0.1 \\ A2 &= 2*A1*(1-A1) \\ A3 &= 2*A2*(1-A2) \text{ etc.} \end{aligned}$$

(on duplique la formule pour les cellules suivantes en glissant le curseur de la souris depuis le coin inférieur droit de la cellule vers le bas). Observer l'éventuelle convergence de la suite pour n grand, et comparer la valeur de la limite aux points fixes déterminés en 2.

4. Dans la suite, on va utiliser le programme **Dynamics Solver**, qui permet l'intégration numérique et la visualisation graphique de systèmes dynamiques discrets. Dans le répertoire **TP-maitrise**, lancer le programme **DSolver**, puis ouvrir le fichier **Logistique/logistic**.

Les icônes **Go** et **Stop** permettent de lancer et stopper le calcul. L'icône (rectangle blanc) permet d'effacer l'écran.

Observer l'influence sur la suite de la condition initiale (double-cliquer sur le premier point de la série) et du paramètre r . Qu'observe-t-on au voisinage d'une bifurcation ?

5. On s'intéresse au *diagramme de bifurcation* de l'application logistique, qui représente les valeurs des itérés $\{x_n\}$ en fonction de r . Ouvrir le fichier **bifurcation** qui se trouve dans le même répertoire. Pour quelle valeur de r le système entre-t-il dans un régime chaotique ?

Décrire ce régime, et la façon dont le système passe du régime stationnaire au régime chaotique.

Il pourra être nécessaire de zoomer vers certaines régions du diagramme : double-cliquer en un point, puis choisir **Draw > Zoom > Zoom In** pour zoomer, et **Edit > Range** pour modifier les bornes de variation de r ainsi que le nombre d'itérations initiales. On peut également utiliser le 11ème icône pour modifier les bornes de variation de r et la précision Δr .

Il pourra aussi être intéressant de ne pas afficher les premières itérations, pour éviter les phénomènes transitoires, qui sont particulièrement longs au voisinage des points de bifurcation (11ème icône, paramètre **First value**).

- Relever les valeurs r_n du paramètres de contrôle pour lesquelles la suite passe d'un régime périodique de période 2^n à un régime de période 2^{n+1} . Calculer le rapport suivant :

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n},$$

Cette constante universelle s'appelle *constante de Feigenbaum*, et est obtenue pour tout système dynamique présentant une transition vers le chaos par cascade de dédoublement de période. Chercher sur le web sa valeur, et la comparer à celle que vous avez obtenue numériquement (vous pouvez aussi la comparer à la valeur obtenue dans le TP expérimental du rebond chaotique d'une bille).

Partie II : L'attracteur de Hénon

On considère maintenant une suite récurrente à deux dimensions, qui à tout point du plan $X_n = (x_n, y_n)$ associe une image $X_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1})$. On introduit l'application de Hénon, définie par :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= y_n + 1 - ax_n^2 \\ y_{n+1} &= Jx_n, \end{cases} \quad (2)$$

où a est le paramètre de contrôle (similaire à r dans l'application logistique). On fixe la valeur de J à 0,3. (Ce paramètre $J \in [0, 1]$ représente la dissipation d'énergie du système. A chaque itération, le système perd une fraction J de son énergie ; on a $J = 1$ pour un système conservatif).

- Dans le répertoire TP-*maitrise/Henon*, ouvrir le fichier **Henon**, et cliquer sur **Go** pour lancer le calcul. Observer et décrire l'ensemble des points (x_n, y_n) pour différentes valeurs de a entre 0 et 1.4 (plus finement entre 1.2 et 1.4) (cliquer sur le 9ème icône pour changer la valeur de a). Identifier les régimes périodiques et chaotique.

Comme pour l'application logistique, il pourra être intéressant de ne pas afficher les premières itérations, pour éviter les phénomènes transitoires (11ème icône, paramètre **First value**).

- Dans le cas $a = 1.4$, décrire les propriétés de la figure obtenue en l'observant par zooms successifs. Cette figure dépend-elle des conditions initiales (x_0, y_0) ? (double-cliquer en un point pour choisir la condition initiale). On appelle *attracteur étrange* un tel objet mathématique. Vous pourrez chercher sur le web d'autres exemples d'attracteur étrange.
- Calculer les points fixes (x^*, y^*) de cette application.

- Observer l'attracteur par zooms successifs au voisinage des points fixes (x^*, y^*) calculés dans le cas $a = 1.4$. On pourra pour cela choisir des conditions initiales très proches des points fixes (choisir le 8ème icône **Initial Values**) et observer uniquement les premières itérations (11ème icône, **Last value**). Montrer qu'un des points fixes est répulsif, tandis que l'autre point fixe est attractif selon une direction et répulsif selon l'autre direction.

On pourra éventuellement utiliser le programme **Henon-zooms**, qui représente 4 zooms successifs de l'attracteur au voisinage du second point fixe.

5. Il est possible de retrouver les directions contractantes et dilatantes du second point fixe. Pour cela on linéarise l'application au voisinage de ce point fixe, en l'écrivant sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \delta x_{n+1} \\ \delta y_{n+1} \end{pmatrix} = \mathcal{J} \begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta y_n \end{pmatrix},$$

où $(\delta x_n, \delta y_n) = (x_n - x^*, y_n - y^*)$ et \mathcal{J} la matrice Jacobienne exprimée dans le cas d'un système discret :

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)}.$$

(calculé pour le second point fixe). Calculer les composantes de la matrice \mathcal{J} pour $a = 1.4$, et déterminer ses valeurs propres $\{\mu_1, \mu_2\}$. Vérifier qu'une direction est contractante ($|\mu_1| < 1$) et l'autre dilatante ($|\mu_2| > 1$). Calculer les vecteurs propres correspondants, et identifier graphiquement les directions associées.

Remarque : D'une manière générale, on peut montrer que la présence d'un point fixe *selle* (avec une direction contractante et une direction dilatante) est une condition nécessaire pour observer un attracteur étrange à partir d'un système dynamique non linéaire dissipatif.

Questions subsidiaires

Que devient l'attracteur lorsqu'est varié le paramètre J ? Que devient application de Hénon dans la limite infiniment dissipative ($J \rightarrow 0$) ? A quoi correspond l'attracteur étrange de Hénon pour l'application logistique ?

Référence

Dynamics Solver est un logiciel libre (*Freeware*) écrit par Juan M. Aguirregabiria. On peut le télécharger, ainsi que la documentation complète à l'adresse <http://tp.lc.ehu.es/jma/ds/ds.html>.

Physique non linéaire

TP : Le rebond chaotique d'une bille

Dans ce TP, on s'intéresse aux rebonds d'une bille sur un plateau oscillant (figure 2). Cette expérience simple illustre la notion de bifurcation, de transition vers le chaos par cascade de dédoublement de périodes et d'attracteur étrange. Dans la première partie, on s'intéresse aux équations du mouvement dans le régime périodique de rebond, tandis que dans la seconde partie on étudie de façon expérimentale la transition vers le chaos dans ce système.

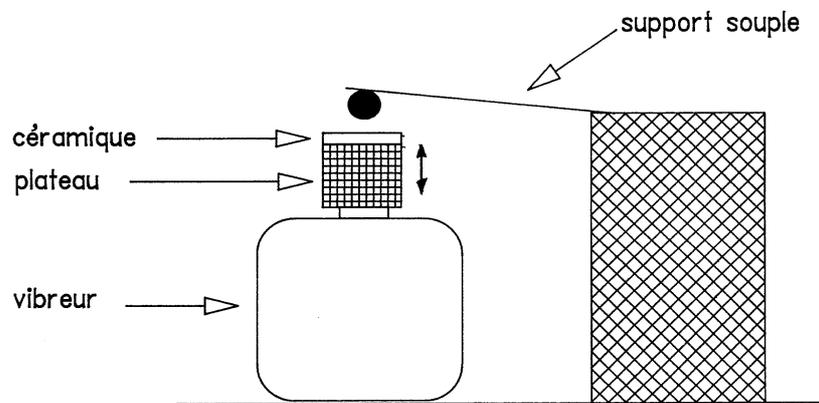


Figure 2: Schéma du dispositif expérimental.

Partie I : Théorie

On considère les rebonds successifs d'une petite bille, supposée ponctuelle, de masse m , sur une surface plane horizontale animée d'un mouvement d'oscillation verticale $h(t) = A \sin \omega t$. La bille est repérée par rapport son altitude $z(t)$. On s'intéresse aux instants des chocs bille-plateau, que l'on caractérise par la phase relative ϕ entre le plateau et la bille (voir la figure 3a). Au moment du choc, l'altitude du plateau $h = A \sin \phi$ et celle de la bille coïncident.

1. Montrer que pour une amplitude A inférieure à une valeur critique, A_c , la bille reste toujours collée au support oscillant. Calculer cette amplitude critique dans le cas d'une oscillation à 30 Hz. Lorsque Pour quelle phase ϕ du plateau le décollement va-t-il avoir lieu lorsque $A \simeq A_c$? lorsque $A \gg A_c$?

On s'intéresse maintenant au régime dans lequel la bille rebondit et ne recolle jamais au plateau. Entre deux impacts successifs, la trajectoire de la bille est une parabole, dont l'équation est :

$$z(t) = z_0 + v'_b t - gt/2, \tag{3}$$

avec $z_0 = h(\phi)$ la hauteur du plateau au moment de l'impact et v'_b la vitesse de la bille juste après l'impact. Cette vitesse après l'impact est donnée par la vitesse relative bille/plateau juste avant l'impact :

$$(v_b - v_p)' = -\mu(v_b - v_p), \tag{4}$$

où $0 \leq \mu \leq 1$ est le coefficient de restitution (on a $\mu = 1$ pour un choc parfaitement élastique). L'impact étant quasi instantané, on a $v'_p = v_p$.

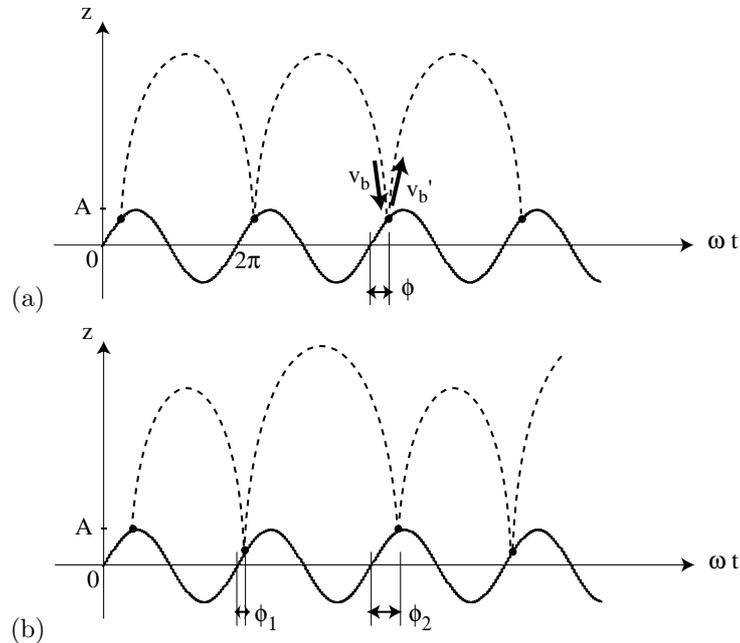


Figure 3: Rebond de la bille sur le plateau oscillant. (a) : Rebond périodique, de période égale à la période du plateau. La suite des phase ϕ_n est stationnaire. (b) : Rebond périodique, de période double de la période du plateau.

On s'intéresse au régime de rebond périodique, dans lequel les phases des impacts successifs sont égales (cas de la figure 3a). Dans ce régime, la trajectoire parabolique est strictement symétrique, et donc la vitesse de la bille en fin de trajectoire v_b est égale et opposée à la vitesse de la bille en début de trajectoire suivante v'_b .

2. En utilisant (3), exprimer v_b en fonction de g et ω . A partir de (4), en déduire que la phase ϕ de l'impact satisfait :

$$\cos \phi = \pi \frac{A_c}{A} \frac{1 - \mu}{1 + \mu}.$$

Montrer que ce régime périodique ne peut exister qu'au-delà d'une amplitude A'_c . Tracer ϕ en fonction de A , et justifier qu'il s'agit d'une *bifurcation*. De quel type de bifurcation s'agit-il ?

3. Expliquer qualitativement, à partir de la figure 3(a), que cette trajectoire périodique est *stable* (pour des valeurs de A modérées), c'est-à-dire que des petites perturbations autour de cette trajectoire sont amorties.

L'expérience montre en fait qu'au-delà d'une certaine valeur A , lorsque la phase s'approche de $\pi/2$ (c'est-à-dire lorsque la position de l'impact s'approche de la position haute du plateau), la trajectoire périodique n'est plus stable, et on obtient une trajectoire de période double, comme sur la figure 3(b), pour laquelle $\phi_{n+2} = \phi_n$.

La suite des $\phi_{n+1} = f(\phi_n)$ étant non linéaire (définie par l'intersection d'une sinusoïde et d'une parabole), son comportement peut devenir très complexe et chaotique. Cet aspect est abordé expérimentalement dans la partie II.

Partie II : Expérience

A. Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est constitué d'un vibreur alimenté par un générateur basse fréquence, de fréquence $f = 30$ Hz que l'on gardera constante. On suppose que l'amplitude d'oscillation A du vibreur est proportionnelle à la tension U délivrée par le générateur. Un réglage grossier (sur le générateur) et un réglage fin (potentiomètre) de cette tension U sont possibles. **Ne pas dépasser 3 V**. On utilisera dans la suite la valeur de la tension efficace mesurée par le voltmètre (en mode alternatif).

La bille en acier est attachée par une fine tige de plastique. Si l'on s'intéresse à des rebonds d'amplitude petite comparée à la longueur de la tige, on peut considérer que le mouvement de la bille est purement vertical, et décrit par sa seule altitude $z(t)$. La bille rebondit sur une céramique piézoélectrique, fixée sur le plateau oscillant, qui délivre une impulsion électrique lorsqu'elle est soumise à une contrainte mécanique. Ainsi, à chaque choc de la bille on peut visualiser sur l'oscilloscope ou acquérir à l'ordinateur un pic dans le signal électrique.

B. Traitement des données

On n'a pas accès expérimentalement à la position simultanée du plateau et de la bille. On ne peut donc pas mesurer la phase ϕ au moment de l'impact. En revanche on a accès aux temps t_i des impacts successifs, et l'on va s'intéresser aux intervalles $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ entre deux impacts (voire la figure 4). Dans le régime où la bille rebondit avec la même période que celle du plateau, la suite $\{\Delta t_n\}$ est donc stationnaire.

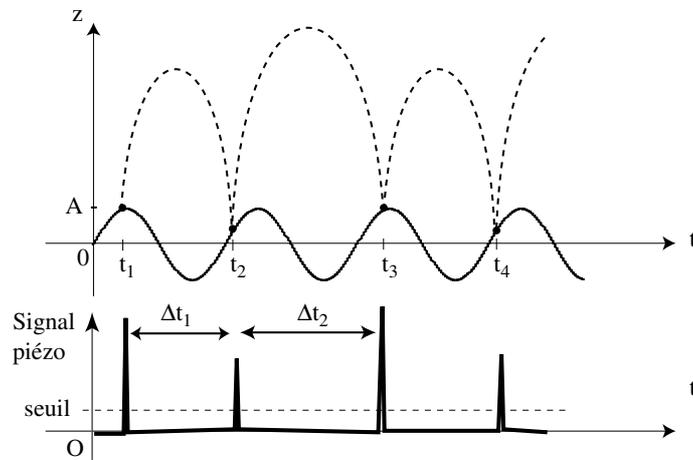


Figure 4: Signal du capteur piézoélectrique au moment des impacts bille-plateau mesuré expérimentalement.

Le signal délivré par le piézoélectrique peut être enregistré sur l'ordinateur, et traité par des programmes sous Matlab pour en extraire les intervalles Δt_i :

- **enregistre(t)** : enregistre le signal pendant t secondes à la fréquence de 44 kHz, puis affiche les 2 premières secondes.
- **dt** : affiche les intervalles de temps Δt_i successifs entre le choc i (à t_i) et le choc $i + 1$ (à t_{i+1}).
- **poincare** : affiche la Section de Poincaré, c'est-à-dire l'ensemble des intervalles de temps Δt_{i+1} en fonction de Δt_i .

- **zoom** : entre en mode “zoom”. Définir un rectangle à la souris. Double-cliquer pour dé-zoomer.
- **axis([x1 x2 y1 y2])** : redéfinit les axes du graphique.

Remarque : Les commandes **dt** et **poincare** calculent les intervalles de temps Δt tels que le signal électrique franchit une valeur seuil (voir la figure 4). Cette valeur seuil est définie automatiquement dans le programme. Si toutefois le résultat ne convient pas, il est possible d'imposer une autre valeur seuil, en spécifiant par exemple **dt(V₀)**, ou V_0 est le seuil exprimé en Volts.

C. Expériences à réaliser

1. Relever (à l'oreille) la tension U à partir de laquelle la bille commence à quitter le plateau. L'amplitude d'oscillation du plateau correspondante est-elle en accord (qualitativement) avec l'amplitude critique A_c calculée en question I-1 ?
2. Observer à l'oscilloscope le signal sinusoïdal du plateau, ainsi que les pics du piézoélectrique, à faible amplitude (U entre 0 et 1 V environ). Relever la valeur de U au-delà de laquelle la période des pics n'est plus égale à celle du plateau. En se restreignant à des valeurs de U telles que les pics restent à la période du plateau ($U < 1.2$ V environ), observer à l'oscilloscope la phase relative des chocs par rapport au plateau, et comparer avec le calcul (question I-2).
Attention : Le signal électrique excitant le plateau est proportionnel à la vitesse et non à la position du plateau. Il faut donc tenir compte d'un déphasage supplémentaire de $\pi/2$.
3. Pour différentes valeurs de U , jusqu'à 1.4 V environ, enregistrer sur l'ordinateur une portion de signal de quelques secondes (commande **enregistre(t)**), et observer les intervalles de temps entre deux pics successifs (commande **dt**). En augmentant progressivement l'amplitude U d'oscillation du plateau, relever les valeurs correspondant aux transitions (procéder par encadrements successifs) :

La bille reste toujours collée au plateau

→ La bille décolle puis recolle à chaque période

→ Elle rebondit à période égale à celle du plateau

→ Elle rebondit avec une période double (...)

4. Observer la Section de Poincaré du signal enregistré pour différentes valeurs de U (commande **poincare**). Cette représentation graphique permet de mieux distinguer les régimes périodiques des régimes aperiodiques. Relever finement les valeurs de transition entre les régimes de période double, quadruple, etc. (En pratique, la précision du matériel ne permet pas d'observer des périodes supérieures à 8).
5. En notant U_i la valeur du paramètre U lors de la transition d'un mouvement de période 2^i à un mouvement de période 2^{i+1} , calculer la largeur des plages $\Delta U_i = U_{i+1} - U_i$. Si vous observez suffisamment de changements de périodicité, calculer le rapport

$$\delta = \frac{\Delta U_{i+1}}{\Delta U_i}.$$

La valeur de ce rapport est une constante universelle, appelée *constante de Feigenbaum*, et est caractéristique de la transition vers le chaos par dédoublements successifs de la période. Chercher sur le web sa valeur, et la comparer à celle que vous avez obtenue expérimentalement (vous pouvez aussi la comparer à la valeur obtenue dans le TP numérique de l'application logistique).

6. Observer en détail, à partir d'un enregistrement long (jusqu'à 40 secondes), l'allure de la section de Poincaré dans le régime chaotique. Observer en particulier la façon dont se répartissent les points (utiliser la fonction `zoom`).

La figure obtenue, un *attracteur étrange*, est caractéristique des systèmes chaotiques. Vous pouvez en chercher d'autres exemples sur le web. Une des propriétés remarquables des attracteurs étranges est le feuilletage fractal des points, qu'il est parfois possible de distinguer expérimentalement malgré la résolution limitée du système.

Question subsidiaire

Au milieu de zones chaotiques, on peut trouver pour certaines plages de valeurs de U des retours à la périodicité. Saurez-vous en trouver ?

Référence

P. Boissel, "La bille qui rebondit : une expérience simple pour aborder la physique du chaos", Bulletin de l'Union des Physiciens **86**, 217 (1992).