

UE1B – Instabilités et Physique non Linéaire

TD 1 : Systèmes dynamiques : stabilité et bifurcation

1 Instabilité

Une masse variable m est montée en haut d'une poutre de longueur L et de masse négligeable (figure 1). Cette poutre peut pivoter autour d'un point fixe O , et est liée à un ressort de torsion exerçant un couple de rappel $\Gamma = -k\theta$, où θ est l'angle par rapport à la verticale.

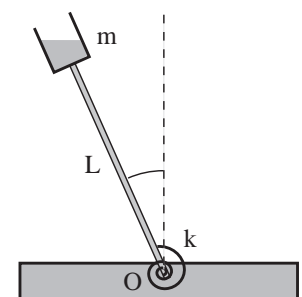


Figure 1:

1. A partir du Principe Fondamental de la Dynamique projeté selon la direction \vec{e}_θ , obtenir une equation différentielle du 2nd ordre pour θ .
2. En ajoutant un terme de frottement "visqueux", c'est-à-dire sous la forme $-\gamma\dot{\theta}$, et en supposant que celui-ci domine le terme d'inertie en $\dot{\theta}$, obtenir une equation différentielle du 1er ordre pour θ .
3. Montrer que les solutions d'équilibre non nulles vérifient

$$\theta_{eq} \propto \pm(m - m_c)^{1/2},$$

pour des masses voisines d'une masse critique m_c que l'on déterminera. Tracer le diagramme de bifurcation dans le plan (m, θ_{eq}) , et discuter qualitativement la stabilité des branches.

On peut aussi considérer que $m = cste$ et que L est le paramètre de contrôle de la bifurcation (instabilité d'un métronome).

2 Ralentissement critique

On considère l'équation différentielle décrivant une bifurcation supercritique :

$$\dot{x} = \mu x - ax^3$$

avec $a > 0$. Donner un exemple de système physique pouvant être modélisé par cette equation. Montrer que le temps caractéristique T diverge au voisinage de la bifurcation (pour $\mu > 0$ et $\mu < 0$).

3 Une bifurcation sous-critique

On considère un système dynamique décrit par l'équation différentielle :

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

où $V(x)$ dépend d'un paramètre de contrôle a . On suppose que ce système est invariant pour la transformation $x \rightarrow -x$. Donner une expression de $V(x)$ pour que ce système décrive une bifurcation sous-critique pour la valeur $a = 1$. Tracer l'allure $V(x)$.

4 Une bifurcation transcritique

Représenter le diagramme de bifurcation du système dynamique décrit par l'équation différentielle

$$\dot{x} = x(a - c - abx),$$

où $x(t)$ est le paramètre d'ordre (observable physique) et $a > 0$ le paramètre de contrôle. Les constantes b et c sont prises positives. Discuter la stabilité des solutions.

5 Allée tourbillonnaire de von Karman

Un fluide de viscosité cinématique ν s'écoule à vitesse constante U autour d'un cylindre de diamètre D . Pour un nombre de Reynolds $Re = UD/\nu$ supérieur à une valeur critique, l'écoulement en aval du cylindre devient instationnaire et présente une émission périodique de tourbillons, comme illustré en figure 2.



Figure 2: Allée tourbillonnaire de von Karman dans l'écoulement en aval d'un cylindre (l'écoulement va de gauche à droite).

De quel type de bifurcation s'agit-il, et quel type d'équation peut modéliser ce phénomène ? Analyser les solutions de cette équation.

6 L'application "tente"

On considère l'application $x_{n+1} = f(x_n)$ décrite par la fonction $f(x)$ représentée en figure 3 (fonction "tente"). Le paramètre de contrôle μ est compris entre 0 et 2.

Décrire graphiquement les points fixes et discuter leur stabilité en fonction de μ . Représenter le diagramme de bifurcation en fonction de μ .

Pour la valeur $\mu = 2$, montrer que $(2/5, 4/5)$ forme un cycle de période 2.

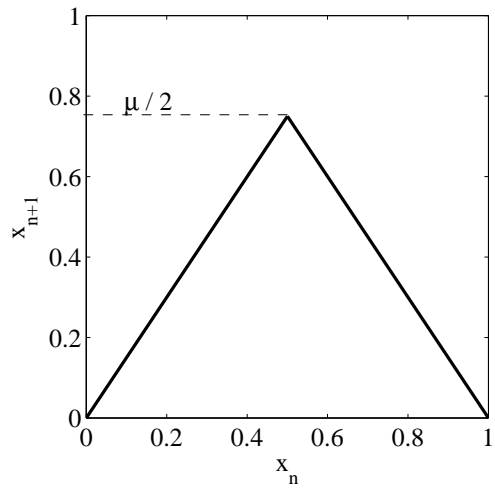


Figure 3: Application “tente”.

UE1B – Instabilités et Physique non Linéaire

TD 2 : Espace des phases, Attracteurs

1 Portraits de phase

1. Tracer dans le plan (x, \dot{x}) le portrait de phase d'un oscillateur harmonique simple (système masse-ressort unidimensionnel). Représenter qualitativement la trajectoire du système dans cet espace en présence de dissipation. Quel est l'attracteur ?
2. Tracer intuitivement, dans l'espace (z, \dot{z}) , le portrait de phase d'une balle rebondissant verticalement sur le sol en $z = 0$, en l'absence puis en présence de dissipation.
3. Tracer dans le plan $(\theta, \dot{\theta})$ le portrait de phase d'un pendule simple non dissipatif. On fera apparaître en particulier les orbites correspondant aux petites oscillations ($|\theta| \ll 1$), l'orbite limite d'oscillations entre $\theta = -\pi$ et π , ainsi que les orbites "passantes" (tours complets du pendule).

2 Oscillateur de Van der Pol

On considère un oscillateur harmonique auquel on ajoute une "force de frottement" négative pour les grandes valeurs de θ et positive pour les petites valeurs :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = (\epsilon - \theta^2) \dot{\theta}.$$

$\epsilon > 0$ est le paramètre de contrôle qui décrit cette "force" : Pour $|\theta| > \epsilon^{1/2}$ elle dissipe l'énergie, tandis que pour $|\theta| < \epsilon^{1/2}$ elle injecte de l'énergie.

1. Montrer que l'énergie mécanique peut s'écrire

$$E = \frac{1}{2}(\omega_0^2 \theta^2 + \dot{\theta}^2).$$

En déduire que

$$\frac{dE}{dt} = \dot{\theta}^2(\epsilon - \theta^2)$$

2. En moyenne sur une période, le système oscille avec une amplitude caractéristique θ_0 qui va dépendre de ϵ , et l'on a $d\bar{E}/dt = 0$ (cycle limite). Près du seuil, $\epsilon \simeq 0^+$, on peut supposer que les oscillations sont quasiment harmoniques,

$$\theta(t) = \theta_0(\epsilon) \cos \omega_0 t$$

A partir de la conservation moyenne de l'énergie $d\bar{E}/dt = 0$ (intégrée sur une période), montrer que l'amplitude vérifie

$$\theta_0 \simeq 2\epsilon^{1/2}$$

De quel type de bifurcation s'agit-il ?

3 Chaotique ou pas chaotique ?

Dénombrer les degrés de liberté dynamiques des systèmes mécaniques représentés en figure 1, et indiquez lesquels peuvent présenter un comportement chaotique.

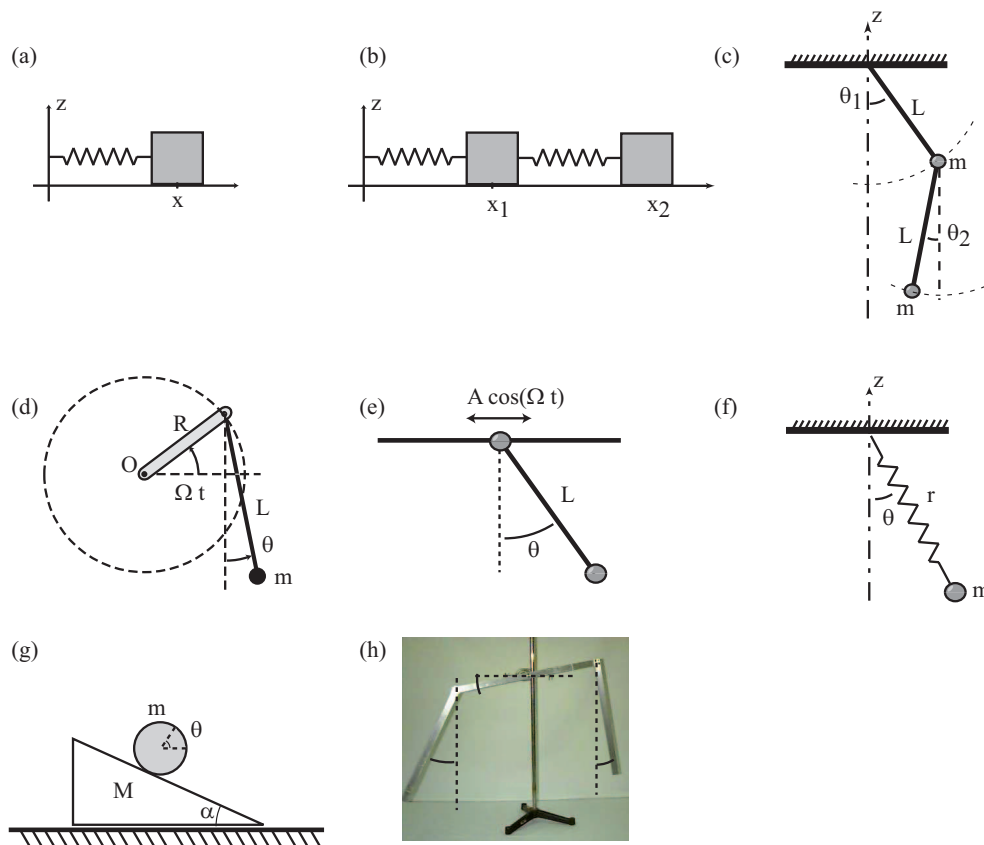


Figure 1: Quelques systèmes mécaniques simples.

4 L'application logistique

On considère un système dynamique discret défini par la suite récurrente

$$x_{n+1} = f_r(x_n) = rx_n(1 - x_n),$$

où $x_n \in [0, 1]$, et $r \geq 0$ est le paramètre de contrôle. La condition initiale x_0 est fixée entre 0 et 1.

1. Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f pour $0 \leq r \leq 4$ (c'est-à-dire que $f(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \in [0, 1]$).
2. Calculer le(s) point(s) fixe(s) x^* de la suite $\{x_n\}$, et en discuter la stabilité en fonction de r . Tracer x^* en fonction de r (diagramme de bifurcation). De quel type est la bifurcation en $r = 1$?
3. Pour $r \geq 3$, montrer que le point fixe x^* est instable, mais que la fonction $f \circ f$ admet deux points fixes x_1^* et x_2^* . De quel type est la bifurcation en $r = 3$?
4. Etude numérique

A partir d'une condition initiale $x_0 \in]0, 1[$ de votre choix, étudier numériquement à l'aide d'Excel la suite $\{x_n\}$. Par exemple, pour $x_0 = 0.1$ et $r = 2$, on pourra écrire :

$$\begin{aligned}
A1 &= 0.1 \\
A2 &= 2*A1*(1-A1) \\
A3 &= 2*A2*(1-A2) \text{ etc.}
\end{aligned}$$

(on duplique la formule pour les cellules suivantes en glissant le curseur de la souris depuis le coin inférieur droit de la cellule vers le bas). Observer l'éventuelle convergence de la suite à n grand pour différentes valeurs de r .

5. Pour $3 \leq r \leq 3.6$, relever les domaines de r pour lesquels la suite est périodique ou chaotique.

5 Attracteur étrange de Hénon

On considère un système dynamique à 3 degrés de liberté, dont on modélise la section de Poincaré à partir d'une application à deux dimensions, qui à tout point du plan $X_n = (x_n, y_n)$ associe une image $X_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1})$:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= y_n + 1 - ax_n^2 \\ y_{n+1} &= Jx_n, \end{cases} \quad (1)$$

(application de Hénon), où a est le paramètre de contrôle (similaire à r dans l'application logistique). On fixe la valeur de J à 0,3. (Ce paramètre $J \in [0, 1]$ représente la dissipation d'énergie du système. A chaque itération, le système perd une fraction J de son énergie ; on a $J = 1$ pour un système conservatif).

1. Visualisez à partir d'un programme informatique (Excel ou mieux) l'attracteur pour les valeurs $a = 1.4$, $J = 0.3$.
2. Calculer les points fixes (x^*, y^*) de cette application en fonction de a et J .
3. Linéariser l'application au voisinage de ces points fixes sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \delta x_{n+1} \\ \delta y_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \delta x_n \\ \delta y_n \end{pmatrix},$$

où $(\delta x_n, \delta y_n) = (x_n - x^*, y_n - y^*)$ et M la matrice de Floquet 2×2 .

4. Calculer les composantes de M pour $a = 1.4$, et déterminer ses valeurs propres $\{\mu_1, \mu_2\}$ (multiplicateurs de Floquet). Vérifier que pour l'un des 2 points fixes, une direction est contractante ($|\mu_1| < 1$) et l'autre dilatante ($|\mu_2| > 1$) – c'est un point fixe "selle".
5. Calculer les vecteurs propres correspondants, et identifier graphiquement les directions associées.
6. Observez numériquement ce que devient l'attracteur lorsqu'est varié le paramètre J . Que devient ce système dynamiques dans la limite infiniment dissipative ($J \rightarrow 0$) ?

6 Attracteur étrange de Pickover

Visualiser à l'aide d'un programme informatique l'attracteur de Pickover donné par le système d'équation

$$\begin{cases} x_{n+1} &= \sin(By_n) + C \sin(Bx_n) \\ y_{n+1} &= \sin(Ax_n) + D \sin(Ay_n), \end{cases} \quad (2)$$

Exemples de valeurs pour les coefficients donnant des attracteurs particulièrement esthétiques : $(A, B, C, D) = (0.7, 0.98, -0.51, -5, 5); (-1.6, 0.43, -1.13, 1.44)$.

UE1B – Instabilités et Physique non Linéaire

TD 3 : Intermittence dans la convection de Rayleigh-Bénard

(Examen de novembre 2005)

Un scénario possible de transition vers le chaos est celui de l'*intermittence*. Un tel scénario peut être observé dans l'expérience de convection de Rayleigh-Bénard sous certaines conditions expérimentales, pour des valeurs du nombre de Rayleigh Ra bien supérieures au seuil d'instabilité conductif-convectif Ra_c . Ce scénario se caractérise par les observations expérimentales suivantes :

- Pour $Ra < Ra_i$, le système présente des rouleaux de convection oscillant temporellement, à une période T .
- Pour $Ra > Ra_i$, ces oscillations régulières sont entrecoupées aléatoirement de brèves interruptions, dites "intermittentes". Ces interruptions sont de plus en plus fréquentes à mesure qu'augmente Ra , et le système finit par devenir complètement désordonné à grands Ra .

On se propose de modéliser une telle transition. On utilise comme paramètre d'ordre la quantité $x(t) = (\langle \theta(t) \rangle - \theta_0) / \theta_0$, avec $\langle \theta(t) \rangle$ la température du fluide en un point fixe moyennée sur une période et θ_0 la température du fluide en ce même point dans le régime conductif. On suggère l'équation d'évolution suivante :

$$\dot{x} = \epsilon + x^2, \quad (1)$$

où ϵ est un paramètre de contrôle réduit.

1. Ecrire cette équation différentielle en introduisant un potentiel $V(x)$, et tracer l'allure de $V(x)$ pour $\epsilon > 0$ et $\epsilon < 0$, en faisant apparaître les solutions stables et instables.
2. Tracer l'allure du diagramme de bifurcation, et donner la valeur critique ϵ_c à la bifurcation. De quel type de bifurcation s'agit-il ? Comment suggérez-vous d'écrire ϵ en fonction de Ra ?

Pour étudier qualitativement l'évolution temporelle de ce système pour $\epsilon > \epsilon_c$, on le discrétise en ne considérant $x(t)$ qu'à intervalles de temps réguliers, $x_n = x(nT)$, avec T la période des oscillations à $\epsilon < 0$. On prendra $T = 1$ pour simplifier.

3. Discrétiser l'équation (1) sous forme d'une suite $x_{n+1} = f_\epsilon(x_n)$.
4. Tracer l'allure de $f_\epsilon(x)$ pour $\epsilon < 0$ et $\epsilon > 0$, et représenter graphiquement les itérés successifs de la suite partant d'une condition initiale $x_0 < 0$. Que se passe-t-il pour $\epsilon \simeq 0^+$?
5. Proposer graphiquement une modification de l'allure de la fonction $f_\epsilon(x)$ pour que les solutions qui s'approchent de $x \simeq 1$ soient réinjectées vers $x \simeq -1$ (avec $\epsilon < 1$).
6. En quoi ce modèle permet-il de reproduire qualitativement les observations expérimentales pour $Ra < Ra_i$ et $Ra > Ra_i$?

On cherche enfin à caractériser la durée des phases d'oscillations périodiques entre deux interruptions intermittentes pour $Ra > Ra_i$. Pour cela, on revient à l'équation différentielle (1).

7. Intégrer l'équation (1) pour $\epsilon > 0$, en cherchant une solution de la forme

$$x(t) = x_0 \tan\left(\frac{t}{\tau}\right),$$

où l'on exprimera les constantes x_0 et τ en fonction de ϵ .

8. Caractériser le temps de divergence de $x(t)$ en fonction de ϵ , et discuter ce résultat en fonction des observations expérimentales et de la question 5.
9. Que pensez-vous de l'utilisation d'une section de Poincaré pour caractériser cette transition par l'intermittence ?

UE1B – Instabilités et Physique non Linéaire

TD 4 : Fractales, dimensions fractales

1 L'ensemble de Cantor



Figure 1: Quelques générations de l'ensemble (ou poussière) de Cantor.

Partant du segment $[0, 1]$, on enlève à chaque itération le tiers médian de chaque segment. Compter, à la génération n , le nombre de segments $N(n)$ de taille $\epsilon(n) = 1/3^n$. $N(\epsilon)$ peut s'écrire :

$$N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D}.$$

Calculer la dimension fractale D .

2 Construction de Koch

On considère la construction itérative dont les 2 premières générations sont représentées en figure 2 (inspiré du "triangle de Koch").

Calculer, à la génération n , le nombre de segments $N(n)$ de longueur $\epsilon(n)$. Montrer que $N(\epsilon)$ peut s'écrire :

$$N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D}.$$

Calculer la dimension fractale D . Que deviennent la longueur totale L de la ligne brisée ainsi que la surface grisée S dans la limite $n \rightarrow \infty$? Proposez une borne supérieure pour S .

3 Quelques autres fractales...

Calculer les dimensions fractales des objets de la figure 3.

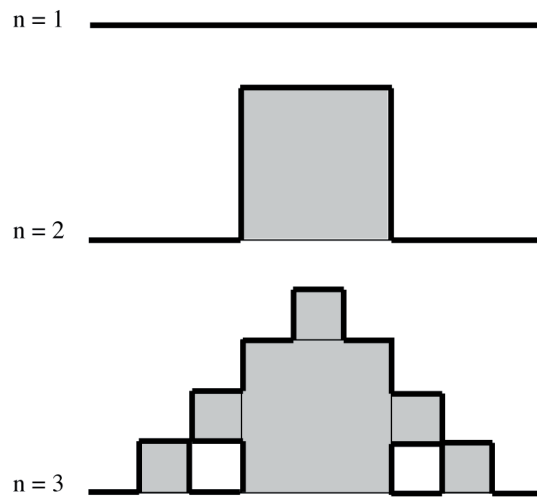


Figure 2: Les 2 premières itérations de la construction de Koch.

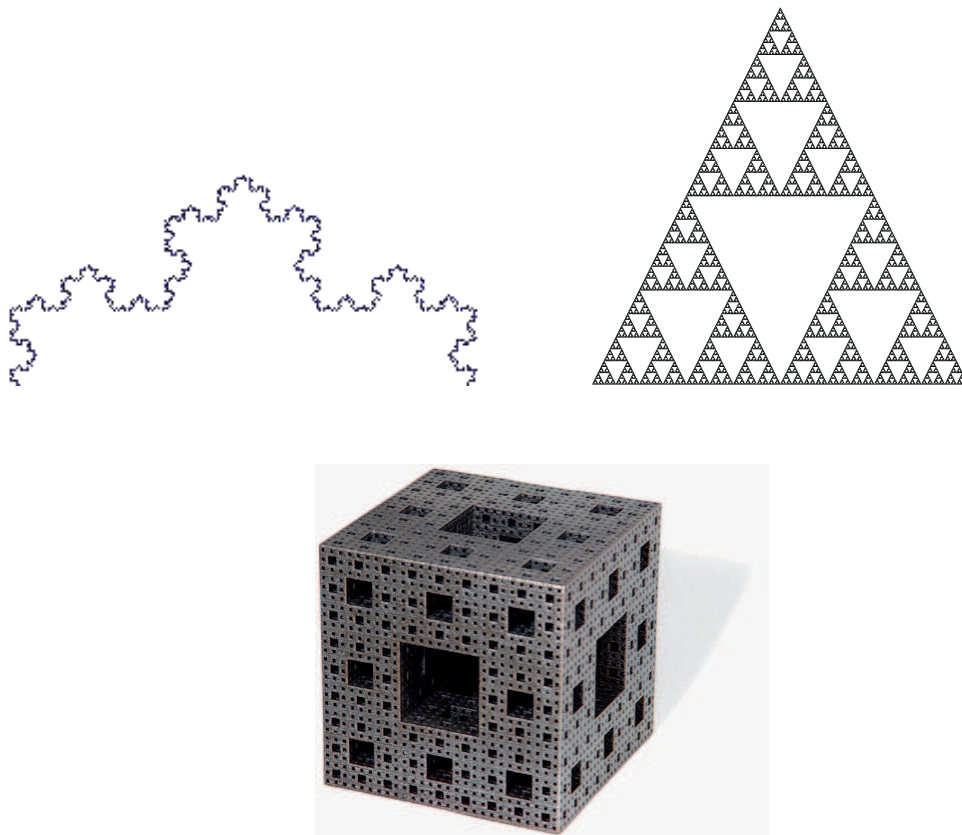


Figure 3: (a) Triangle de Koch, (b) Tamis de Sierpinski, (c) Eponge de Menger.