

Master 1 de Physique
Physique Fondamentale

Année 2017–2018

Mécanique des Fluides

Travaux dirigés



Formulaire

1 Opérateurs différentiels

1.1 Relations usuelles

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} U) &= \Delta U \\
 \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}) &= 0 \\
 \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} U) &= 0 \\
 \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}) &= \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{A} - \overrightarrow{\Delta} \vec{A} \\
 \overrightarrow{\operatorname{grad}}(UW) &= U \overrightarrow{\operatorname{grad}} W + W \overrightarrow{\operatorname{grad}} U \\
 \operatorname{div}(U\vec{A}) &= U \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} U \\
 \overrightarrow{\operatorname{rot}}(U\vec{A}) &= \overrightarrow{\operatorname{grad}} U \wedge \vec{A} + U \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} \\
 \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{A} \wedge \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} + \vec{B} \wedge \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{B} \\
 \operatorname{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} \\
 \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{B}
 \end{aligned}$$

1.2 Relations intégrales

$$\begin{aligned}
 \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} &= \iint_{S(C)} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (\text{théorème de Stokes}) \\
 \oint_C U d\vec{l} &= - \iint_{S(C)} \overrightarrow{\operatorname{grad}} U \wedge d\vec{S} \\
 \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} &= \iiint_{V(S)} \operatorname{div} \vec{A} dV \quad (\text{théorème de Green–Ostrogradsky}) \\
 \iint_S U d\vec{S} &= \iiint_{V(S)} \overrightarrow{\operatorname{grad}} U dV \\
 \iint_S \vec{A} \wedge d\vec{S} &= - \iiint_{V(S)} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} dV \\
 \iint_S (U \overrightarrow{\operatorname{grad}} W - W \overrightarrow{\operatorname{grad}} U) \cdot d\vec{S} &= \iiint_{V(S)} (U \Delta W - W \Delta U) dV
 \end{aligned}$$

1.3 Théorème de Leibnitz

$$\frac{d}{dt} \int_0^{h(t)} f(x, t) dx = \int_0^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f[h(t), t] \frac{dh(t)}{dt}$$

1.4 Théorème du transport de Reynolds

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} f(\vec{r}, t) dV = \iiint_{V(t)} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} \left(f \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \right] dV$$

1.5 Coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}}(U) &= \vec{\nabla}(U) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z \\ \text{div}(\vec{A}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \\ \Delta U &= \vec{\nabla}^2(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \\ \Delta \vec{A} &= \vec{\nabla}^2(\vec{A}) = (\Delta A_x) \vec{e}_x + (\Delta A_y) \vec{e}_y + (\Delta A_z) \vec{e}_z\end{aligned}$$

1.6 Coordonnées cylindriques

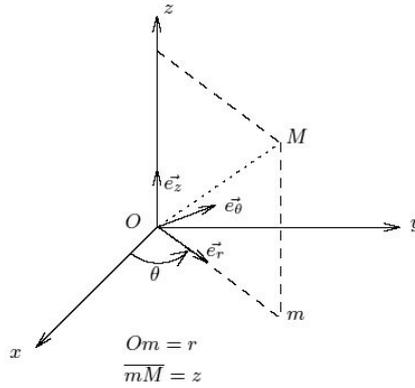


FIGURE 1 – Notations utilisées dans le système des coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}} U &= \vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z \\ \text{div}(\vec{A}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z \\ \Delta U &= \vec{\nabla}^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \\ \Delta \vec{A} &= \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \left(\Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \vec{e}_r + \left(\Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\theta + (\Delta A_z) \vec{e}_z\end{aligned}$$

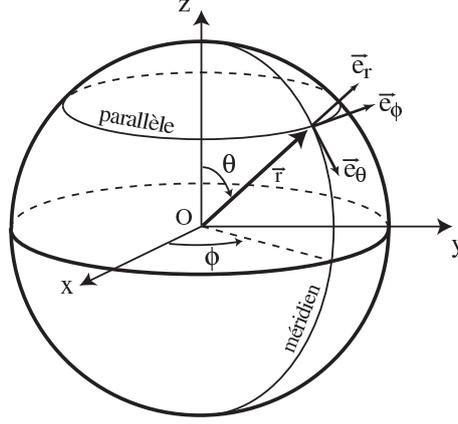


FIGURE 2 – Notations utilisées dans le système des coordonnées sphériques (r, θ, φ) .

1.7 Coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}(U) &= \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \\ \text{div}(\vec{A}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi \\ \Delta U &= \vec{\nabla}^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \\ \vec{\Delta}(\vec{A}) &= \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \left(\Delta A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r \\ &+ \left(\Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\theta + \left(\Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

2 Conservation de la masse et équation de Navier–Stokes

Pour un fluide Newtonien et incompressible on a :

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{u}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} &= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{f}_m + \nu \vec{\nabla}^2 u \end{aligned}$$

2.1 En coordonnées cartésiennes avec $\vec{u} = (u, v, w)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

sur l'axe x

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_x + \eta \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$$

sur l'axe y

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + f_y + \eta \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right]$$

sur l'axe z

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + f_z + \eta \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right]$$

2.2 En coordonnées cylindriques avec $\vec{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

sur l'axe r

$$\rho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + f_r + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right]$$

sur l'axe θ

$$\rho \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + f_\theta + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]$$

sur l'axe z

$$\rho \left[\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + f_z + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]$$

2.3 En coordonnées sphériques avec $\vec{u} = (u_r, u_\theta, u_\varphi)$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

sur l'axe r

$$\rho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\theta^2}{r} - \frac{u_\varphi^2}{r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + f_r$$

$$+ \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2(ru_r)}{\partial r^2} - \frac{2u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2u_\theta \cot \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right]$$

sur l'axe θ

$$\rho \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2 \cot \theta}{r} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + f_\theta$$

$$+ \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2(ru_\theta)}{\partial r^2} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right]$$

sur l'axe φ

$$\rho \left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{u_\theta u_\varphi \cot \theta}{r} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + f_\varphi$$

$$+ \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2(ru_\varphi)}{\partial r^2} - \frac{u_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right]$$

Le théorème du transport de Reynolds

1 Expression générale

Soit une fonction $f(\vec{r}, t)$ dépendant des coordonnées d'espace \vec{r} et du temps t . On s'intéresse aux variations temporelles de la grandeur

$$M(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} f(\vec{r}, t) d^3\vec{r},$$

où le domaine $\mathcal{D}(t)$ considéré peut se déplacer et se déformer au cours du temps (on parle de volume de contrôle). On note $\vec{V}(\vec{r}, t)$ la vitesse de déplacement d'un point \vec{r} se situant sur la surface $S(t)$ du domaine mobile $\mathcal{D}(t)$. On peut montrer que

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\mathcal{D}(t)} f(\vec{r}, t) d^3\vec{r} \right] = \int_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial f}{\partial t} d^3\vec{r} + \oint_{S(t)} f(\vec{r}, t) \vec{V}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \quad (1)$$

$$= \int_{\mathcal{D}(t)} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \text{div} [f(\vec{r}, t) \vec{V}(\vec{r}, t)] \right\} d^3\vec{r} \quad (2)$$

Ce résultat constitue le théorème du transport de Reynolds, qui peut se généraliser à une grandeur $\vec{F}(\vec{r}, t)$ vectorielle. En effet, en écrivant (1) pour chacune des composantes du champ \vec{F} , il vient :

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\mathcal{D}(t)} \vec{F}(\vec{r}, t) d^3\vec{r} \right] = \int_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} d^3\vec{r} + \oint_{S(t)} \vec{F}(\vec{r}, t) (\vec{V} \cdot d\vec{S}). \quad (3)$$

Pour un volume de contrôle fixe, on retrouve :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \vec{F}(\vec{r}, t) d^3\vec{r} = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} d^3\vec{r}. \quad (4)$$

2 Conservation de la masse

Dans le cas particulier où f désigne la masse volumique $\rho(\vec{r}, t)$ d'un fluide (éventuellement compressible) de champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$, le taux de variation de la masse $M(t)$ contenue dans le domaine $\mathcal{D}(t)$ est ainsi donné par

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3\vec{r} + \oint_{S(t)} \rho(\vec{r}, t) \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{D}(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{V}) \right] d^3\vec{r}.$$

Le déplacement de $\mathcal{D}(t)$ est pour le moment arbitraire (en conséquence de quoi $\vec{V} \neq \vec{v}$ en général). On peut néanmoins choisir de suivre dans leur mouvement les particules fluides contenues à l'instant initial dans le domaine $\mathcal{D}(0)$ (le volume de contrôle est alors un volume "matériel"). Dans ces conditions, $\vec{V} = \vec{v}$. De plus, en l'absence de sources de création ou d'annihilation de matière (cas générique), la masse $M(t)$ se conserve au cours du temps, indépendamment des déformations de $\mathcal{D}(t)$. On a alors

$$\frac{dM}{dt} = 0 \iff \int_{\mathcal{D}(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) \right] d^3\vec{r} = 0,$$

et l'on retrouve la relation de continuité.

Exemple d'application : obtention des équations du mouvement en "eau peu profonde" (TD3).

3 Transport de la quantité de mouvement

Soit à l'instant $t = 0$ un volume $\mathcal{D}(0)$, que l'on suit avec le mouvement des particules fluides qu'il contient (volume matériel). Comme précédemment, on a ici $\vec{V}(M, t) = \vec{v}(M, t)$ pour tous les points M de la surface $S(t)$ du volume $\mathcal{D}(t)$. On note $\vec{F}(t)$ la résultante des forces extérieures s'exerçant sur $\mathcal{D}(t)$. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$\vec{F}(t) = \frac{d}{dt} \left[\int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) d^3\vec{r} \right],$$

que l'on peut réexprimer à l'aide du théorème du transport :

$$\vec{F}(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) d^3\vec{r} + \iint_{S(t)} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}). \quad (5)$$

Exemple d'application : voir le TD sur le ressaut hydraulique (page 11). Obtention de la vitesse de propagation d'un mascaret en fonction des caractéristiques du ressaut.

Exercice 1 À l'aide du théorème du transport, retrouver la règle de Leibnitz

$$\frac{d}{dt} \int_0^{h(t)} f(x, t) dx = \int_0^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f[h(t), t] \frac{dh(t)}{dt}.$$

Exercice 2 Interprétation de l'opérateur divergence.

Soit un volume matériel élémentaire δv . Etablir que le taux de variation de δv est donné par la divergence du champ de vitesse \vec{v} :

$$\frac{1}{\delta v} \frac{d(\delta v)}{dt} = \text{div } \vec{v}.$$

Exercice 3 Considérons un volume matériel $\mathcal{D}(t)$. Montrer que pour toute fonction $\Phi(\vec{r}, t)$, on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \Phi d\vec{r} = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \frac{D\Phi}{Dt} d\vec{r},$$

où D/Dt désigne la dérivée particulaire. Ce résultat est parfois désigné sous le nom de théorème de Reynolds.

TD 1 : Analyse dimensionnelle

Rappel sur le théorème π ou de Buckingham

Soit une relation $u_1 = f(u_2, \dots, u_k)$ reliant k grandeurs physiques, ces k grandeurs faisant intervenir r unités physiques dimensionnellement indépendantes (mètres, secondes, kilogrammes... en pratique, $r \leq 4$ dans le système MKSA). Le théorème π énonce qu'il est possible d'écrire cette relation sous forme adimensionnée,

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{k-r}),$$

où les π_i sont $k - r$ nombres sans dimension formés à partir d'une grandeur dimensionnée u_i et de r autres grandeurs dimensionnellement indépendantes. Le nombre sans dimension π_i représente la grandeur u_i adimensionnée par une combinaison des r autres grandeurs,

$$\pi_i = u_i \cdot u_\alpha^{a_\alpha} \cdot u_\beta^{a_\beta} \cdot u_\gamma^{a_\gamma} \dots, \quad (1)$$

où les r exposants $a_\alpha, a_\beta \dots$ sont des relatifs entiers ou fractionnaires.

Force de frottement visqueuse sur une sphère

On admet que la force de frottement F_D agissant sur une particule sphérique se déplaçant très lentement dans un fluide visqueux est une fonction du diamètre d , de la vitesse de la particule V et de la viscosité dynamique η (on néglige la force d'inertie devant la force de viscosité).

1. Écrire les équations aux dimensions de F_D, d, V, η en fonction de M, L, T (masse, longueur, temps). On pourra aussi écrire la matrice aux dimensions dont les lignes sont les dimensions choisies et les colonnes les grandeurs physiques.
2. Dédire le nombre minimum r d'unités physiques nécessaires pour exprimer les grandeurs F_D, d, V, η puis le nombre de grandeurs adimensionnées indépendantes $k - r$.
3. A partir de la liste des grandeurs d, V, η sélectionner r grandeurs indépendantes (prendre les expressions dimensionnelles les plus simples).
4. Chercher les nombres sans dimension π_i comme produits d'une grandeur physique u_i et des r grandeurs indépendantes (equation 1).
5. Dédire la relation adimensionnée $F_D/(\eta V d) = C$, où C est une constante qui ne peut être déterminée par analyse dimensionnelle, et qui pourra être déterminée par exemple expérimentalement. Comparer avec la loi de Stokes ($F_D = 3\pi\eta dV$).

Débit d'un déversoir rectangulaire

On suppose que le débit volumique Q ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$) d'un écoulement permanent d'un fluide par un déversoir rectangulaire est une fonction de la hauteur h du fluide en amont du déversoir, de la largeur b du déversoir et de la gravité g .

1. Écrire les équations aux dimensions de Q, h, b, g .
2. Dédire le nombre minimum r d'unités physiques nécessaire pour exprimer les grandeurs Q, h, b, g puis le nombre $k - r$ de grandeurs adimensionnées indépendantes.
3. A partir de la liste des grandeurs h, b, g sélectionner r grandeurs indépendantes.
4. Chercher les nombres sans dimension π_i comme produits d'une grandeur physique u_i et des r grandeurs indépendantes (equation 1).
5. Dédire la relation adimensionnée

$$\frac{Q}{g^{1/2} h^{5/2}} = \Phi\left(\frac{h}{b}\right).$$

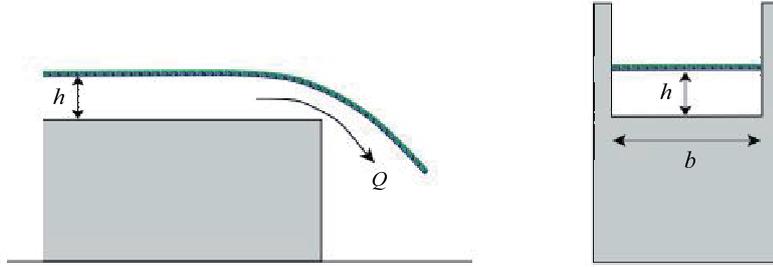


FIGURE 1 – Vue de côté et de face du déversoir.

Le principe de similitude

Un modèle (ou maquette) est une représentation d'un système physique que l'on peut utiliser pour prévoir le comportement d'un prototype dans certaines conditions. Le prototype vérifie une relation donnée entre les valeurs adimensionnées, $\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n)$. Pour que les phénomènes physiques présents sur le modèle soient identiques à ceux du prototype, alors tous les termes adimensionnés entre modèle et prototype doivent être égaux : c'est la condition de similitude (similitude géométrique, dynamique, cinématique..). Ainsi, si l'on choisit l'égalité des valeurs des grandeurs adimensionnées du modèle et du prototype, $\pi_{2m} = \pi_2, \dots, \pi_{nm} = \pi_n$, alors on a $\pi_{1m} = \pi_1$ et la mesure de la grandeur physique u_{1m} sur le modèle permet de prédire la valeur de u_1 sur le prototype.

Sillage oscillatoire et génération de tourbillons

On souhaite étudier la résistance aux oscillations d'une structure de pont soumise au vent. On considère un corps de section de largeur D et de longueur L placé dans un écoulement de fluide incompressible de vitesse uniforme V . On sait que, sous certaines conditions, il peut se développer dans le sillage de ce corps des tourbillons qui se détachent régulièrement à une fréquence bien définie (allée de tourbillons de Bénard-von Kármán). Cet écoulement oscillatoire peut entrer en résonance avec des fréquences propres d'oscillations de la structure, et provoquer des vibrations nuisibles.

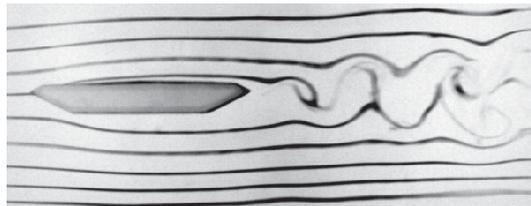


FIGURE 2 – Génération de tourbillons dans le sillage d'un obstacle de dimension $L \times D$ (l'écoulement va de gauche à droite).

La structure de pont considérée est de dimension $D = 0,1$ m et $L = 0,3$ m et l'on veut connaître pour une vitesse du vent $V = 50$ km/h la fréquence d'oscillation ω pouvant être nuisible pour le pont. On prendra la masse volumique et la viscosité dynamique de l'air $\rho = 1,23$ kg.m⁻³ et $\eta = 1,79 \cdot 10^{-5}$ N.s.m⁻². Pour cela, on réalise une maquette à échelle réduite de dimension $D_m = 20$ mm, que l'on place dans un tunnel à eau. On prendra la masse volumique et la viscosité dynamique de l'eau : $\rho = 10^3$ kg.m⁻³ et $\eta = 1,12 \cdot 10^{-3}$ N.s.m⁻².

On admettra que la fréquence ω est une fonction des dimensions D et L du corps, de la vitesse

du fluide V , de la masse volumique ρ et de la viscosité dynamique η du fluide :

$$\omega = f(D, L, V, \rho, \eta).$$

1. En suivant les mêmes étapes que précédemment, déduire la relation adimensionnée : $St = \Phi(D/L, Re)$ où $St = \omega D/V$ est le nombre de Strouhal et $Re = \rho V D/\eta$ le nombre de Reynolds.
2. Déterminer la dimension L_m (similitude géométrique) ainsi que la vitesse de l'eau V_m pour le modèle (similitude du nombre de Reynolds).
3. On mesure sur la maquette une fréquence de détachement tourbillonnaire $\omega_m = 50$ Hz. En déduire la fréquence des tourbillons ω sur le prototype (similitude du nombre de Strouhal).

Exercice supplémentaire : Écoulement dans un tuyau cylindrique

On considère l'écoulement d'un fluide incompressible soumis à un gradient de pression dans un tuyau cylindrique de diamètre D . On admet que le gradient de pression $G = \Delta p/L$ appliqué au fluide est une fonction du diamètre D , de la masse volumique ρ et de la viscosité dynamique η du fluide, ainsi que de la vitesse moyenne V du fluide :

$$G = f(D, \rho, \eta, V).$$

En suivant les mêmes étapes que dans les exercices précédents, montrer que le problème peut s'écrire de manière adimensionnée :

$$\frac{GD}{\rho V^2} = \Phi(Re) \quad \text{avec} \quad Re = \frac{\rho V D}{\eta}.$$

Afin d'obtenir la fonction Φ expérimentalement dans un intervalle donné du nombre de Reynolds $Re = \rho V D/\eta$, on effectue une série de mesures sur un tuyau cylindrique de 1,5 m de longueur et de 1,25 cm de diamètre intérieur. Le fluide est de l'eau à 15,6°C ; masse volumique $\rho = 10^3$ kg.m⁻³, viscosité dynamique $\eta = 1,12 \cdot 10^{-3}$ N.s.m⁻². A partir de ces mesures, on trace $GD/\rho V^2$ en fonction de Re (figure 3). La relation obtenue $\phi(Re)$ reste valable pour n'importe quel tuyau avec n'importe quel fluide, pourvu que le nombre de Reynolds Re reste dans la gamme où ont été effectuées les mesures.

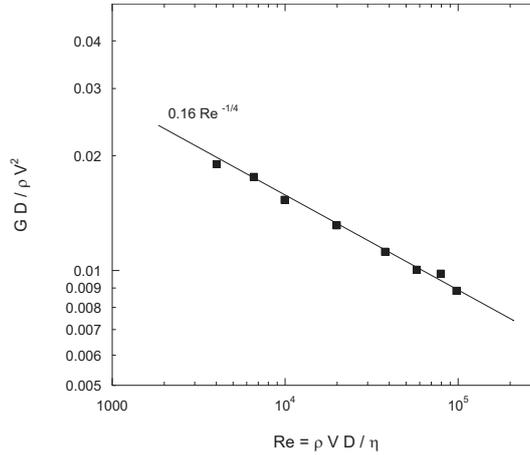


FIGURE 3 – Tracé expérimental de $GD/\rho V^2$ en fonction de Re , en coordonnées logarithmiques. La droite indique un ajustement en loi de puissance, $\phi(Re) = 0,16Re^{-1/4}$.

TD 2 : Ressaut hydraulique dans un canal

On considère un écoulement stationnaire de faible profondeur dans un canal ouvert rectangulaire et de pente négligeable. On s'intéresse à la formation d'un ressaut immobile, c'est-à-dire à un changement brutal de la profondeur de H_1 en amont à H_2 en aval, avec $H_1 < H_2$ (cf. figure 1). L'épaisseur du ressaut est comparable à la profondeur moyenne de l'eau. Pour simplifier l'analyse, on modélise cet écoulement en négligeant la viscosité et la compressibilité du fluide, et en supposant les vitesses d'écoulement \vec{V}_1 et \vec{V}_2 uniformes et horizontales en amont comme en aval du ressaut. On note L la largeur du canal (perpendiculaire au plan de la figure).

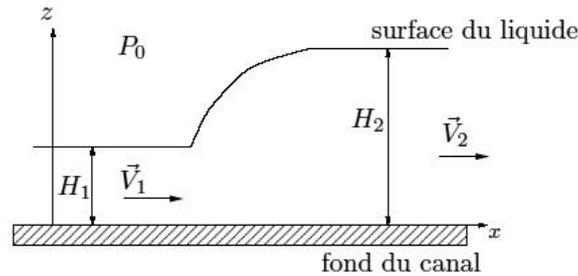


FIGURE 1 – Ressaut hydraulique.

1. Montrer que la répartition de la pression dans le fluide en amont et en aval du ressaut est hydrostatique. Exprimer la pression $P(z)$ en amont et en aval du ressaut en fonction de la masse volumique ρ du fluide, de la hauteur z considérée et de la pression atmosphérique P_0 .
2. Équation de conservation de la masse.

A partir du théorème de transport relatif à la densité ρ , appliqué à un volume de contrôle que l'on précisera, donner l'expression du débit massique D_m en fonction de ρ et de (V_1, H_1, L) ou de (V_2, H_2, L) .

3. Equation de transport de la quantité de mouvement.
 - (a) Utiliser le théorème du transport de Reynolds relatif à la densité de quantité de mouvement pour obtenir la relation entre les grandeurs amont et aval :

$$\frac{1}{2} g H_1^2 + V_1^2 H_1 = \frac{1}{2} g H_2^2 + V_2^2 H_2,$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

- (b) Calculer V_1 et V_2 en fonction de H_1 , H_2 et g . On pose $\alpha = H_2/H_1$, ainsi que les nombres de Froude amont et aval :

$$Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gH_1}}, \quad Fr_2 = \frac{V_2}{\sqrt{gH_2}}.$$

Exprimer Fr_1 et Fr_2 en fonction de H_1 et H_2 , puis de α seulement.

- (c) Montrer que pour $\alpha > 1$ on a $Fr_1 > 1$ et $Fr_2 < 1$. Un écoulement pour lequel on a $Fr > 1$ est dit *super-critique*, ou *torrentiel*; lorsque $Fr < 1$, l'écoulement est dit *sous-critique*, ou *fluvial*.
- (d) On admet que \sqrt{gH} représente la vitesse de propagation des ondes à la surface d'un fluide de profondeur H (dans l'approximation où H est faible comparée à la longueur

d'onde, cf. TD 4). En raisonnant sur la direction de propagation de perturbations à la surface en amont et en aval du ressaut, proposez une interprétation physique pour la formation du ressaut.

- (e) A.N. Avec un débit volumique par unité de largeur de $0,5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ et une profondeur d'approche de $0,2 \text{ m}$, calculer F_1 puis H_2 .

4. Bilan énergétique.

- (a) On rappelle que pour une particule de fluide de vitesse \vec{v} dans un champ de pesanteur, la densité d'énergie mécanique est $e = \rho (v^2/2 + gz)$ et que la puissance fournie par les forces de pression P à travers une surface $d\vec{S}$ est $-P\vec{v} \cdot d\vec{S}$. En appliquant le théorème de transport de Reynolds à la densité d'énergie, montrer que l'on a la relation

$$\frac{dQ}{dt} = \iint_{sc} \rho \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} \right) \vec{v} \cdot d\vec{S},$$

où dQ/dt est la puissance transformée en chaleur dans le volume de contrôle (VC) par la turbulence et SC est la surface de contrôle.

- (b) Donner l'expression de la puissance dissipée au niveau du ressaut en fonction de D_v , des grandeurs V et H en amont et aval, ainsi que de ρ et g . Calculer la puissance dissipée pour un canal d'un mètre de largeur contenant de l'eau ($H_1 = 0,2 \text{ m}$, $D_v = 0,5 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$).
- (c) En déduire l'échauffement de l'eau entre l'entrée et la sortie du ressaut (on donne la capacité calorifique de l'eau, $C_p = 4180 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$). Commentez.

Question subsidiaire : Le mascaret.

Un mascaret est une discontinuité de hauteur d'eau, qui peut survenir lorsque le courant d'un fleuve rencontre la marée montante (figure 2). Devant le mascaret, la hauteur est H_1 ($H_1 < H_2$) et l'eau est quasiment immobile. Par un changement de référentiel adéquat, montrer que ce problème est équivalent à celui du ressaut hydraulique, et trouver la vitesse de propagation c du mascaret en fonction de H_1 , H_2 et g .

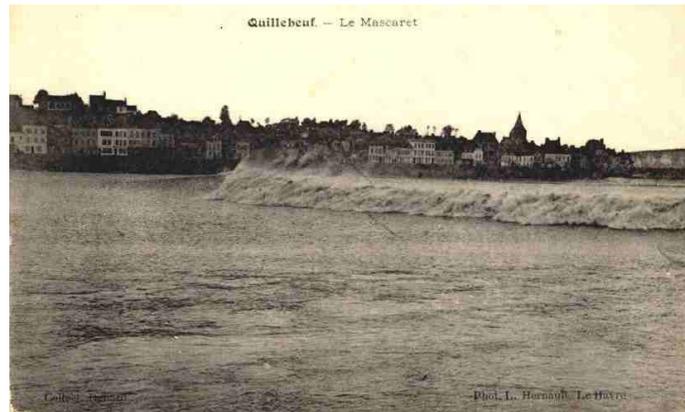


FIGURE 2 – Mascaret de la Seine au niveau de Quillebeuf en 1920.

TD 3 : Ondes de surface en eau très profonde

On s'intéresse à la propagation des ondes interfaciales entre deux fluides superposés. Pour simplifier on considérera le cas d'un liquide de viscosité négligeable (de l'eau par exemple) et d'un gaz (de l'air) de viscosité et de densité négligeables comparées à celle du liquide.

L'axe z est dirigé vers le haut, la surface de l'eau au repos définissant l'origine $z = 0$. On se restreint à des ondes planes se propageant selon les $x > 0$, invariantes selon y , et l'on suppose que l'interface prend la forme $\zeta(x, t) = \zeta_0 e^{i(kx - \omega t)}$, où $k > 0$ est le nombre d'onde et ζ_0 l'amplitude de l'onde. La profondeur d'eau, h_0 , est supposée très grande devant les longueurs d'onde considérées, et n'intervient donc pas dans le problème. On supposera en outre que l'amplitude ζ_0 reste faible comparée à la longueur d'onde (approximation linéaire).

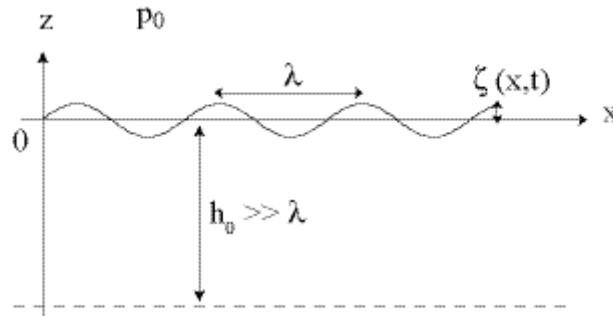


FIGURE 1 – Onde de surface en eau très profonde.

1. La propagation de cette onde est associée à un mouvement incompressible d'un fluide parfait, que l'on supposera de plus irrotationnel. En déduire que le champ de vitesse dérive d'un potentiel $\Phi(x, z, t)$, et donner l'équation que doit satisfaire ce potentiel.
2. En recherchant des solutions sous forme complexe $\Phi = f(z) \exp i(kx - \omega t)$, montrer que, compte tenu des conditions aux limites sur la vitesse en $z \rightarrow -\infty$, la fonction $f(z)$ s'écrit $f(z) = \Phi_0 \exp(kz)$.
3. On admet que, dans la limite $k\zeta_0 \ll 1$, la condition aux limites en $z = \zeta(x, t)$ s'écrit $u_z = \partial\zeta/\partial t$. En déduire la relation entre ζ_0 et Φ_0 .
4. Tracer l'allure du champ de vitesse. Que pensez-vous de la trajectoire des particules fluides ?
5. Le fluide étant parfait, le champ de vitesse doit de plus satisfaire l'équation d'Euler. Montrer que, toujours selon l'approximation $\zeta_0 k \ll 1$, on peut négliger le terme non-linéaire dans cette équation.
6. Montrer que finalement la pression est liée au potentiel par la relation :

$$p = cste - \rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \rho g z,$$

où ρ est la masse volumique du liquide.

7. On écrit maintenant la condition aux limites dynamique : La différence de pression de part et d'autre de l'interface est proportionnelle à la courbure de l'interface et à la tension de surface γ entre l'air et l'eau, $p - p_0 = -\gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$. En déduire la relation de dispersion des ondes de surface :

$$\omega^2 = gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3.$$

8. Tracer l'allure de la vitesse de phase c en fonction de k , et montrer qu'il existe deux limites simples selon que k est petit ou grand devant un nombre d'onde critique k_c que l'on déterminera (A.N. $\gamma = 0,072$ N/m pour l'interface eau-air). Quel régime correspond aux ondes de gravité et lequel correspond aux ondes capillaires? Quelle est la vitesse minimum à laquelle une onde peut se propager à la surface d'un liquide immobile?
9. Exprimer la vitesse de groupe $c_g = \partial\omega/\partial k$ dans les deux régimes $k \ll k_c$ et $k \gg k_c$. Que vaut le rapport c/c_g dans ces deux régimes? Représentez schématiquement la propagation d'un paquet d'onde dans ces deux régimes.



FIGURE 2 – Ronds dans l'eau.

TD 4 : Écoulement autour d'un cylindre

Cylindre au repos : paradoxe de d'Alembert

On considère un cylindre de rayon R et de hauteur infinie ($H \rightarrow +\infty$), qui se trouve comme obstacle dans un écoulement \vec{u} d'un fluide parfait de densité ρ . Le cylindre étant imperméable, le fluide le contournera, comme schématisé dans la figure 1. Loin en amont et en aval du cylindre, l'écoulement tend vers un écoulement uniforme $U_0 \vec{e}_x$.

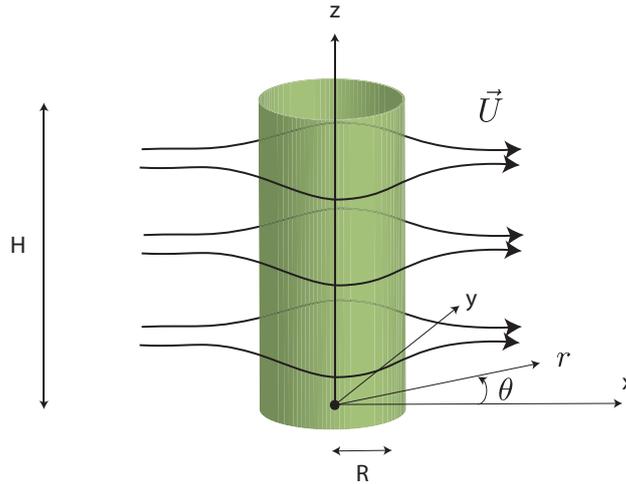


FIGURE 1 – Ecoulement autour d'un cylindre fixe.

Dans cet exercice, on souhaite calculer cet écoulement ainsi que la résultante des forces de pression exercée par le fluide sur le cylindre.

1. Selon votre intuition, dans quel sens sera dirigé cette force ?
2. On suppose que le champ de vitesse \vec{u} dérive d'un potentiel Φ satisfaisant $\nabla^2 \Phi = 0$. Sous quelles hypothèses une telle écriture est-elle possible ? On rappelle l'expression du Laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (1)$$

3. On suppose que le potentiel Φ solution du problème peut s'écrire sous la forme $\Phi_0 + \Phi_1$, où Φ_0 est le potentiel en l'absence du cylindre. Donner l'expression de Φ_0 en coordonnées cylindriques (r, θ) .
4. Préciser les conditions aux limites pour le potentiel total Φ à la surface du cylindre en $r = R$.
5. On cherche des solutions à l'équation (1) sous la forme $r^n \cos \theta$. Identifier les valeurs de n possibles, et en déduire la forme générale du potentiel $\Phi(r, \theta)$ solution du problème.
6. En déduire l'écoulement $\vec{u}(r, \theta) = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta$.
7. Calculer la pression $p(r, \theta)$ dans le fluide en utilisant la loi de Bernoulli (on note p_0 la pression à l'infini).
8. En déduire que la pression à la surface du cylindre s'écrit

$$p(r = R, \theta) - p_0 = \frac{1}{2} \rho U_0^2 (1 - 4 \sin^2 \theta).$$

Représenter sur un schéma les points de pression maximale et minimale.

9. Calculer la force de traînée, c'est-à-dire la résultante des forces de pression sur le cylindre par unité de hauteur. Pourquoi parle-t-on de "paradoxe", et proposer quelques idées qui pourraient l'expliquer.

Cylindre en rotation : effet Magnus

On suppose maintenant que le cylindre est en rotation à la vitesse angulaire Ω dans le sens anti-horaire (figure 2). Cette rotation va induire un écoulement tournant supplémentaire autour du cylindre :

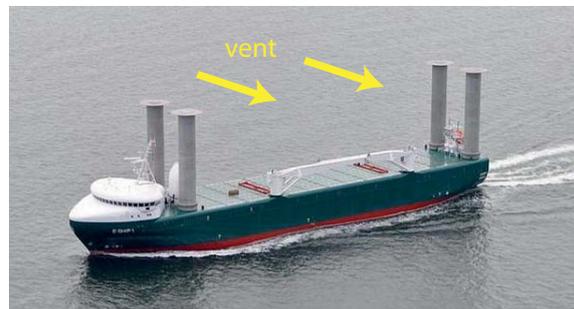
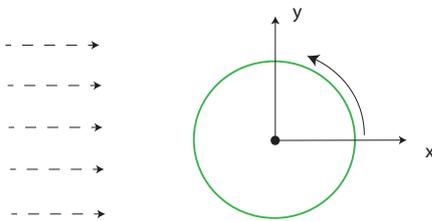
$$\vec{u}_{tot} = \vec{u} + \vec{u}_{rot}, \quad (2)$$

où \vec{u} est l'écoulement en l'absence de rotation déterminé dans la partie précédente.

1. On suppose que l'écoulement total reste irrotationnel, et donc en particulier $\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_{rot} = \vec{0}$. En supposant que \vec{u}_{rot} s'écrive sous la forme $u_{rot}(r)\vec{e}_\theta$, et en admettant que la condition au limite à la surface du cylindre est $u_{rot}(r=R) = \Omega R$, en déduire l'expression de $\vec{u}_{rot}(r, \theta)$ en tout point du fluide. On rappelle l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

2. Pour des valeurs modérées de Ω , identifier deux valeurs de θ pour lesquelles la vitesse totale \vec{u}_{tot} sur le cylindre s'annule. En déduire l'allure des lignes de courant de l'écoulement total autour du cylindre en rotation.
3. Malgré la rotation du fluide, nous pouvons toujours appliquer la loi de Bernoulli ici. Pourquoi ? En déduire la pression dans le fluide.
4. Calculer la résultante des forces de pression sur le cylindre par unité de hauteur. Cette force est appelée "force de Magnus". Dans quel sens agit-elle ?
5. Un tel dispositif peut être utilisé pour la propulsion navale. Le "E-ship", montré en figure 2, est un cargo récent avec 4 cylindres de hauteur $H = 27$ m et de rayon $R = 2$ m. Sachant que la densité de l'air est d'environ $\rho = 1.2$ kg/m³, estimer la force de Magnus totale sur le bateau placé dans un vent latéral de 20 m/s pour des cylindres tournant à la vitesse d'un demi-tour par seconde.
6. Proposer d'autres situations dans lesquelles la force de Magnus joue un rôle important.

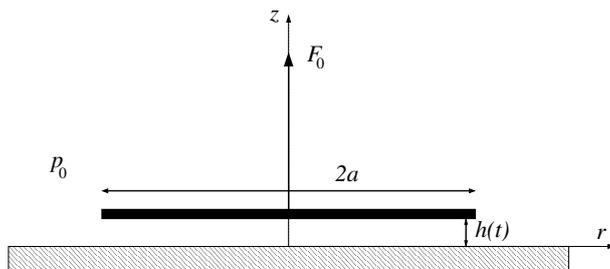


E-ship, © W. Winne, Marine Traffic

FIGURE 2 – Écoulement autour d'un cylindre en rotation.

TD 5 : Force d'adhérence sur un disque

On considère un disque de rayon a placé parallèlement à un plan rigide, l'espace entre ces deux surfaces étant occupé par un fluide visqueux, de densité ρ et de viscosité cinématique ν . La distance $h(t)$ entre les deux surfaces varie lorsqu'on applique une force ascendante $F(t)$ sur le disque. On souhaite obtenir l'expression de la force $F(t)$ en fonction de l'épaisseur du film $h(t)$.



On négligera la gravité dans ce problème. On suppose de plus que le fluide occupe l'ensemble de l'espace autour du disque à tout temps et que le champ de vitesse est bidimensionnel : $\vec{u} = u_r(r, z, t)\vec{e}_r + u_z(r, z, t)\vec{e}_z$ en coordonnées cylindriques. Enfin, on se place dans l'approximation de lubrification : on considère l'écoulement comme quasi-parallèle et lentement variable dans le temps, avec $h/a \ll 1$ et $\text{Re} \ll a/h$ (cf. cours).

1. Écrire l'équation d'incompressibilité et en déduire une comparaison des ordres de grandeurs entre u_z et u_r .
2. Donner une condition sur $\frac{\partial h}{\partial t}$ pour que le terme instationnaire puisse être négligé dans l'équation de Navier-Stokes.

Compte tenu des approximations effectuées, l'écoulement est régi par l'équation de Stokes. On admettra qu'elle se réduit finalement à

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \eta \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

3. Écrire les conditions aux limites sur u_r, u_z et p .
4. On cherche à déterminer la distribution de pression $p(r, t)$ sur la surface inférieure du disque, en $z = h(t)$.
 - a) Calculer u_r en fonction de $\frac{\partial p}{\partial r}$, z et h en tenant compte des conditions aux limites.
 - b) Calculer u_z en fonction de $\frac{\partial p}{\partial r}$, r , z et h à l'aide de l'équation d'incompressibilité en tenant compte de la condition aux limites en $z = 0$.
 - c) Déduire la relation reliant $\frac{\partial p}{\partial r}$ aux grandeurs r et $h(t)$ en utilisant la condition aux limites sur u_z en $z = h(t)$.
 - d) Intégrer l'équation en $p(r, t)$ en tenant compte des conditions aux limites sur la surface du fluide en contact avec l'air.
5. Calculer la force d'adhérence exercée par le fluide sur le disque.

6. Écrire le principe fondamental de la dynamique sur le disque en considérant que l'on tire le disque verticalement avec une force constante F_0 (on négligera la masse du disque). En déduire une équation différentielle pour $h(t)$, que l'on intégrera sous la forme

$$h(t) = \frac{h_0}{\sqrt{1 - t/\tau}}$$

où τ est un « temps de décollement », que l'on identifiera. Que pensez vous de cette singularité à $t = \tau$?

7. Application numérique : Calculer τ dans le cas de l'eau, avec $h_0 = 0,1$ mm, $F_0 = 1$ N, $a = 2$ cm.

TD 6 : Mouillage forcé, modèle de Landau–Levitch

Pour réaliser industriellement un dépôt de liquide sur un substrat solide, on tire le solide à enduire d'un bain liquide, à vitesse constante. Il est alors important de pouvoir contrôler l'épaisseur du dépôt.

Dans ce problème on considère une plaque plane immergée dans un bain liquide et tirée verticalement et lentement à la vitesse V de telle sorte que l'on reste toujours en régime stationnaire. Par convention, $z = 0$ correspond à la surface du liquide loin de la plaque. On notera ρ la densité du liquide, η sa viscosité dynamique, et γ la tension interfaciale entre l'air et le liquide. Dans la suite on négligera la masse volumique et la viscosité de l'air, l'interface correspondra donc à une « surface libre ».

On peut distinguer trois régions dans cet écoulement (voir la figure 1) :

- Région (I), ou région asymptotique : le film est entraîné par la plaque et reste d'épaisseur finale constante, qu'on notera e .
- Région (II), ou région de lubrification : l'écoulement est faiblement non parallèle et les effets visqueux sont prédominants.
- Région (III), dite du ménisque statique : la forme du ménisque est contrôlée par les forces de tension de surface et par la gravité.

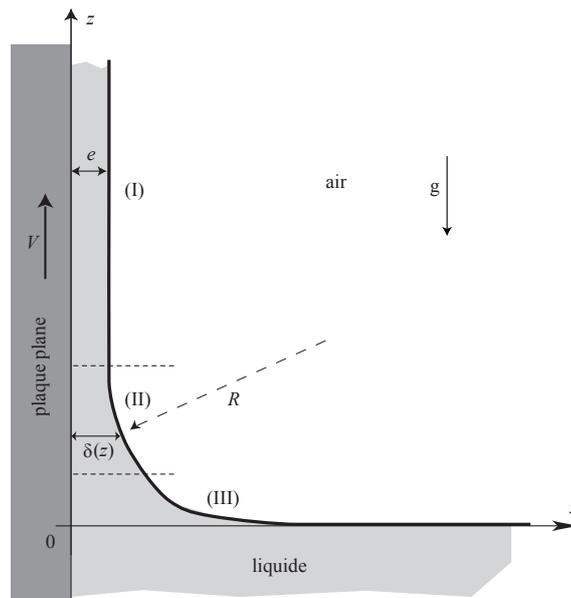


FIGURE 1 – Schéma du film liquide entraîné par le mouvement vertical de la plaque.

On admet que l'épaisseur du film e est une fonction des paramètres ρ , g , γ , η et V . On peut alors montrer par analyse dimensionnelle qu'elle peut s'exprimer comme

$$e = \lambda_c \Phi(\mathfrak{R}, \text{Ca})$$

avec $\text{Ca} = \eta V / \gamma$ est appelé nombre capillaire et $\mathfrak{R} = \rho V \lambda_c / \eta$ le nombre de Reynolds construit avec la longueur capillaire $\lambda_c = \sqrt{\gamma / (\rho g)}$.

A) Région asymptotique (I)

On suppose que l'épaisseur est constante et que la vitesse n'a qu'une composante verticale $v(x)$.

A1. Écrire l'équation de Navier-Stokes projetée sur les axes Ox et Oz . En déduire que la pression dans le fluide est égale à la pression atmosphérique de l'air p_0 dans toute la région (I).

A2. Calculer le profil de vitesse $v(x)$ et tracer son allure. Calculer la vitesse en $x = e$, et donner une condition sur V pour que celle-ci soit positive ou négative.

A3. Calculer le débit volumique par unité de largeur transverse Q . À quelle condition peut-on écrire $Q \simeq Ve$? Tracer dans ce cas le profil $v(x)$. Montrer que cette condition revient à comparer un temps de diffusion visqueuse et le temps pour atteindre en chute libre la vitesse V . On supposera cette condition satisfaite dans la suite du problème.

B) Région du ménisque statique (III)

Dans cette région, on suppose que le fluide est au repos. On repère l'interface du liquide par sa hauteur en fonction de x , notée $h(x)$. Loin de la plaque ($x \rightarrow \infty$), l'interface peut être considérée comme plane, d'altitude $z = 0$.

B1. Écrire ce qui reste de l'équation de Navier-Stokes dans cette condition hydrostatique. En déduire la pression qui existe dans le fluide à l'altitude z . Quelle pression a-t-on dans le plan $z = 0$?

On rappelle que le saut de pression de part et d'autre d'une interface courbée s'écrit $\Delta p = \gamma \kappa$ où κ désigne la courbure de l'interface. Sous le paramétrage choisi, en notant avec des primes, les dérivées selon x , on a

$$\kappa = -h''(x)/[1 + h'(x)^2]^{3/2}. \quad (1)$$

B2. En égalisant cette pression hydrostatique au niveau de l'interface avec le saut de pression dû à la tension de surface, en déduire une relation entre l'altitude $h(x)$ de l'interface et la courbure en ce point.

B3. Montrer que dans le cas de faibles pentes $h'(x) \ll 1$, l'interface a une forme exponentielle dont l'échelle caractéristique est donnée par la longueur capillaire λ_c .

C) Région (II) de lubrification

Dans cette région d'épaisseur $\delta(z)$ variant faiblement par rapport à z , on peut supposer que les termes inertiels et de gravité sont négligeables et que les hypothèses de lubrification s'appliquent, c'est-à-dire que la composante de la vitesse selon Ox est très petite devant celle selon Oz .

L'expression de la courbure κ de la surface $x = \delta(z)$ s'écrit selon ce paramétrage :

$$\kappa = -\delta''/[1 + \delta'^2]^{3/2}, \quad (2)$$

où δ' désigne maintenant la dérivée de δ selon z .

C1. Écrire l'équation de Laplace donnant le saut de pression dans la limite des faibles pentes ($|\delta'| \ll 1$). Que vaut la pression dans la région (II) ?

C2. Donner dans cette région (II) la composante sur Oz de l'équation de Navier-Stokes. En déduire que l'on a :

$$\gamma \delta''' + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \quad (3)$$

C3. Montrer que les hypothèses de lubrification et les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = \delta(z)$ conduisent au profil de vitesse parabolique suivant :

$$v(x, z) = V \left[1 + \frac{\delta'''}{Ca} x(\delta - x/2) \right]. \quad (4)$$

C4. En déduire le débit volumique par unité de largeur de plaque Q .

C5. En égalisant ce débit avec celui trouvé dans la région (I) dans la limite des faibles épaisseurs, en déduire que $\delta(z)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\delta^3 \delta''' = 3 \text{Ca}(e - \delta). \quad (5)$$

C6. Calculer la vitesse à la surface $v(x = \delta(z))$. En utilisant cette équation (5), montrer que cette vitesse en surface s'annule pour une épaisseur critique $\delta(z) = e_c$ que l'on déterminera en fonction de e . Dessiner le profil de vitesse dans la région (II) de part et d'autre de cette épaisseur critique, et en déduire l'allure des lignes de courant.

En faisant un raccordement entre la forme de l'interface de la région (III) et celle de la région (II), on peut montrer la loi de Landau–Levitch qui s'écrit

$$e = 0,644\sqrt{2} \times \lambda_c \text{Ca}^{2/3}. \quad (6)$$

D) Applications numériques

La loi de Landau–Levitch se démontre sous l'hypothèse $\text{Ca} \ll 1$. En pratique, elle est vérifiée pour des nombres capillaires inférieurs à 10^{-2} .

Si l'on sort précipitamment de son bain, la vitesse V est de l'ordre de 0,5 m/s. Montrer qu'on est en limite du modèle de Landau–Levitch, mais que celui-ci s'applique encore. Quelle est alors l'épaisseur d'eau du bain qui va couvrir notre corps? Pour un adulte de corpulence moyenne, la surface du corps est de l'ordre de $1,7 \text{ m}^2$. Quelle est alors la masse d'eau du bain que l'on va entraîner avec soi?

Propriétés de l'eau : $\gamma = 50 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{m}$, $\eta = 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\rho = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

TD 7 : Dynamique tourbillonnaire

On considère un tourbillon rectiligne d'axe \vec{e}_z dans un fluide de viscosité cinématique ν . Le fluide occupe tout l'espace, et l'on ne considère par l'effet de la gravité. On suppose que l'écoulement est de symétrie axiale. Plus précisément, on considère dans un premier temps que l'écoulement est purement orthoradial : en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , il est décrit par un champ de vitesse de la forme $\vec{u}(\vec{r}, t) = u_\theta(r, t)\vec{e}_\theta$, et sa vorticité est donnée par

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_\theta) \vec{e}_z.$$

Cas sans viscosité

Si l'on néglige la viscosité, on peut considérer le cas d'un tourbillon infiniment fin : sa vorticité est concentrée sur l'axe z ,

$$\vec{\omega} = \Gamma \delta^{(2)}(\vec{r}) \vec{e}_z, \tag{1}$$

où Γ est une constante, et $\delta^{(2)}(\vec{r})$ la distribution de Dirac à 2 dimension, telle que $\delta^{(2)}(\vec{r}) = 0$ si $\vec{r} \neq 0$, et $\int \delta^{(2)}(\vec{r}) dS = 1$.

1. Montrer que Γ représente la circulation de la vitesse sur tout contour encerclant l'axe z . En déduire le profil de vitesse $u_\theta(r)$.
2. Montrer que ce champ de vitesse est solution stationnaire de l'équation d'Euler, et déterminer le champ de pression associé ; on notera p_0 la pression loin du tourbillon. Tracer l'allure de $p(r)$.
3. Peut-on appliquer le théorème de Bernoulli pour cet écoulement ? Montrer que l'on peut retrouver le champ de pression à partir de ce théorème.

Cas avec viscosité

On tient compte maintenant des effets de la viscosité. Au temps $t = 0$, l'écoulement est décrit par la solution sans viscosité (1). Mais du fait de la viscosité, cet écoulement n'est plus stationnaire, et l'on va étudier son évolution au cours du temps.

On rappelle l'équation d'évolution de la vorticité :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{\omega}.$$

1. En admettant que l'écoulement garde ses symétries initiales, montrer que la vorticité évolue dans ce problème selon une simple équation de diffusion. En déduire qualitativement l'évolution du rayon de cœur du tourbillon $\delta(t)$ (région dans laquelle se concentre la vorticité) en fonction du temps.
2. Montrer que la distribution gaussienne de vorticité

$$\vec{\omega}(r, t) = \frac{\Gamma_0 \vec{e}_z}{4\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}$$

est solution de cette équation différentielle.

3. Calculer la circulation $\Gamma(r, t)$ sur un cercle de rayon r ; est-elle conservée ? En déduire le profil de vitesse $u_\theta(r, t)$, et tracer son allure   différents temps.
4. Montrer que pour $r \ll \delta(t)$, on obtient un écoulement de rotation solide, dont on calculera la vitesse angulaire en fonction du temps. Qu'obtient-on pour $r \gg \delta(t)$?



FIGURE 1 – Démonstration du mécanisme d'étirement tourbillonnaire.

Cas avec écoulement axial

On considère maintenant la situation d'un tourbillon étiré axialement : en plus de la vitesse orthoradiale $u_\theta(r, t)$, il existe un champ de déformation imposé stationnaire donné par $u_z = \gamma_z z$ et $u_r = -\gamma_r r$.

1. Exprimer γ_r en fonction de γ_z .
2. Que devient l'équation d'évolution pour la composante ω_z de la vorticité étant donné cet écoulement de déformation ?
3. Montrer qu'il existe une solution stationnaire vérifiant

$$\frac{\partial}{\partial r} \omega_z + \frac{\gamma_z}{2\nu} r \omega_z = 0.$$

4. Intégrer cette équation, et montrer que la vorticité vérifie

$$\omega_z(r) = \omega_0 e^{-r^2/2\delta^2},$$

où le rayon de cœur δ est maintenant une constante. Identifier δ en fonction de γ_z et ν .

5. On considère l'expérience d'étirement tourbillonnaire représentée en figure 1 : une cuve cylindrique de rayon $R = 25$ cm et de hauteur $h = 120$ cm, remplie d'eau, et percée au fond d'un trou de diamètre $d = 3$ cm. La vitesse de vidange est de $U = 10$ cm s⁻¹, et est compensée par un débit entrant via un tuyau injectant une vitesse horizontale orthoradiale en haut de la cuve. Estimer le rayon de cœur δ en fonction de h et du nombre de Reynolds $Re = Uh/\nu$.
6. En admettant que l'écoulement déterminé précédemment en milieu infini soit applicable dans le cas de cette expérience, quelles sont les régions de l'écoulement qui contribuent à la dissipation d'énergie par viscosité ? (on rappelle l'expression de la puissance dissipée par unité de masse, $\epsilon = 2\nu e_{ij} e_{ij}$, où e_{ij} est la partie symétrique du tenseur de gradient de vitesse). Que devient cette puissance ? Comment est-elle compensée en régime stationnaire ?