Université Paris-Sud **Année 2009-10**
Master 1 de Mécanique-Physique

P-MEC-408B – Examen de Turbulence

Mardi 13 Avril 2010

Durée : 2 heures - sans document

Exercice 1 : Sillage turbulent d'une balle de tennis

Le record de vitesse de service au tennis est détenu par l'Américain Andy Roddick (Coupe Davis en 2004), avec une balle à 249.4 km/h. Le diamètre d'une balle de tennis est de 6.5 cm, la densité de l'air est $\rho = 1.2$ kg m^{-3}, et la viscosité cinématique de l'air est $\nu = 15 \times 10^{-6}$ m^{2}s^{-1}.

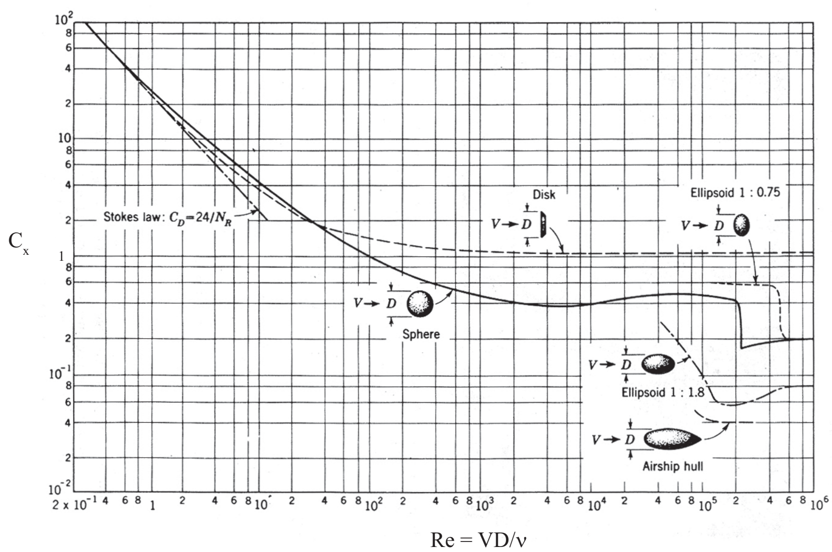

Figure 1: Coefficient de traînée C_x de différents objets en fonction du nombre de Reynolds Re.

a) Rappeler l'expression de la force de traînée F en fonction du coefficient de traînée C_x dans le cas d'une sphère. D'après la figure 1, calculer la force exercée sur la balle de tennis.

b) Estimer l'ordre de grandeur de la contrainte τ à la surface de la balle. En déduire la vitesse de friction u^*, ainsi que l'épaisseur de sous-couche visqueuse δ_v. Que pensez-vous de cette sous-couche visqueuse compte tenu de la rugosité de la balle ?

c) Calculer la puissance P dissipée par les forces de frottement à cette vitesse. Estimer la puissance dissipée par unité de masse ϵ au voisinage de la balle (en m^{2}s^{-3}).

d) Rappeler l'expression de l'échelle de Kolmogorov η en fonction de ϵ et ν, et sa signification physique. Calculer l'ordre de grandeur de l'échelle de Kolmogorov η dans le sillage de la balle. Que devient l'énergie cinétique de l'air dans le sillage ?

Exercice 2 : Transfert de chaleur dans une couche de mélange

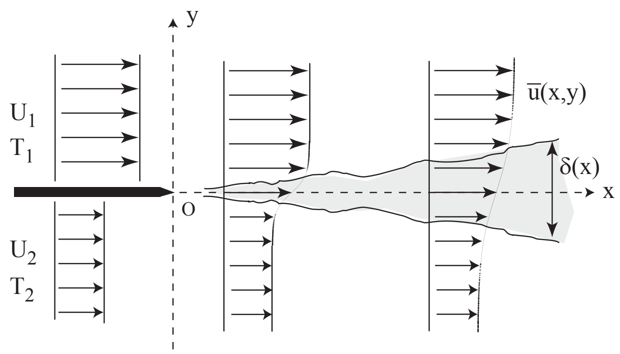

Figure 2: Couche de mélange turbulente entre deux fluides de températures différentes.

On s'intéresse dans ce problème au mélange turbulent de deux fluides de même densité et de températures différentes dans la géométrie d'une couche de mélange bidimensionnelle en régime statistiquement stationnaire (figure 2). En amont de la couche de cisaillement ($x < 0$), les deux régions de fluide non mélangées sont de température T_1 en $y > 0$ et T_2 en $y < 0$, avec $T_1 > T_2$. On suppose la différence de température suffisamment faible pour pouvoir négliger les effets de convection naturelle (force de flottaison négligeable).

1. **Equation de Reynolds pour la température**

   On rappelle l'équation de diffusion-advection de la température :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}, \tag{1}$$

   où κ est la diffusivité thermique.

   a) En introduisant dans l'équation (1) la décomposition de Reynolds pour la vitesse et la température, montrer que l'équation pour la température moyenne s'écrit :

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \overline{u_i} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\overline{T' u_i'} + \kappa \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} \right). \tag{2}$$

   b) On rappelle que, dans le cadre du modèle de viscosité turbulente, on modélise le tenseur de contrainte turbulente $\tau_{ij} = -\rho \overline{u_i' u_j'}$ sous la forme $\tau_{ij} = \rho \nu_T (\partial \overline{u_i}/\partial x_j + \partial \overline{u_j}/\partial x_i)$, où $\nu_T(x, y)$ est la viscosité turbulente. Par analogie avec ce modèle, proposez une modélisation pour le flux de température turbulent $-\overline{T' u_i'}$, en introduisant un coefficient de diffusivité turbulente κ_T (en $\mathrm{m^2 s^{-1}}$).

   c) Discutez, en fonction du nombre de Péclet turbulent $Pe = u'\ell/\kappa$ (où u' et ℓ sont les échelles de vitesse et de longueur des fluctuations turbulentes), sous quelles conditions l'équation (2) devient

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \overline{u_i} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\kappa_T \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} \right). \tag{3}$$

   Que pensez-vous de l'approximation $\kappa_T = cste$?

2. **Profil de température**

On suppose que, dans la partie autosimilaire de la couche de mélange, le profil de vitesse est donné par :

$$\overline{u_x}(x,y) = U_m + \Delta U\, f(Y),$$

avec $Y = y/\delta(x)$ la coordonnée réduite, $f(Y)$ une fonction adimensionnée impaire telle que $f(\pm\infty) = \pm 1/2$, et $\delta(x)$ la largeur de la couche définie de sorte que $f(\pm 0.5) = \pm 0.4$. On suppose que l'on a $\delta(x) \ll L$, où L est la longueur caractéristique de la couche de mélange selon x. On suppose en outre la différence de vitesse très faible, de sorte que $\Delta U \ll U_m$. Enfin, on suppose que la couche de mélange s'élargit linéairement, et l'on note $S = d\delta/dx = cste$.

a) Indiquez les signes de $\kappa \partial \overline{T}/\partial y$ et de $-\overline{T' u'_y}$ dans l'équation (2).

b) Evaluer les différents termes de l'équation (3) dans la géométrie de la couche de mélange. Montrer que cette équation peut se simplifier sous la forme :

$$U_m \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa_T \frac{\partial \overline{T}}{\partial y}\right). \qquad (4)$$

c) Exprimer les dérivées partielles $\partial/\partial x$ et $\partial/\partial y$ en fonction de $\partial/\partial Y$ et de $\delta(x)$, Y et S.

d) On suppose que la diffusivité turbulente s'exprime sous la forme $\kappa_T(x,y) = \alpha\, \Delta U\, \delta(x)$, avec α une constante sans dimension. Justifier physiquement un tel choix.

e) Montrer alors que l'équation (4) peut se ramener à une équation différentielle ordinaire,

$$\overline{T}'' + \frac{1}{\sigma^2} Y \overline{T}' = 0, \qquad (5)$$

où la prime ' désigne la dérivée par rapport à Y, et où σ est une constante que l'on identifiera.

f) Vérifier que le profil de température moyen

$$\overline{T}(x,y) = T_m + \Delta T\, \mathrm{erf}(Y)$$

est solution de l'équation différentielle (5), où la "fonction erreur" $\mathrm{erf}(Y)$ est la primitive de la gaussienne

$$\mathrm{erf}(Y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^Y e^{-Y^2/2\sigma^2} dY.$$

Identifier les constantes T_m et ΔT en fonction de T_1 et T_2, et tracer l'allure de $\overline{T}(Y)$. On rappelle la normalisation de la gaussienne :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Y^2/2\sigma^2} dY = 1.$$

g) Montrer que le flux de température vertical $-\overline{T' u'_y}$ peut s'écrire sous la forme $\Delta T\, \Delta U\, \Phi(Y)$, et le tracer en fonction de Y. En déduire que le flux, intégré sur un axe vertical y donné, est indépendant de x.