Université Paris-Sud **Année 2008-09**
Master 1 de Mécanique-Physique

P-MEC-408B – Examen de Turbulence

Lundi 27 Avril 2009

Durée : 2 heures - sans document

Ecoulement turbulent dans un canal plan rugueux

On considère un écoulement stationnaire dans un canal plan, de longueur L (selon x) et d'épaisseur $2h$ (selon y). Les parois du canal sont couvertes de rugosités d'épaisseur $e \ll h$ (voir la figure 1). Cet écoulement est généré par une différence de pression Δp imposée entre l'entrée et la sortie du canal. La distance entre les parois latérales (selon z) est supposée suffisamment grande par rapport à h pour que l'écoulement puisse être considéré comme bidimensionnel. De plus, on se place suffisamment loin de l'entrée du canal ($x \gg h$) pour que toutes les quantités statistiques basées sur la vitesse soient invariantes par translation selon x. On note (u, v) les composantes de la vitesse selon (x, y).

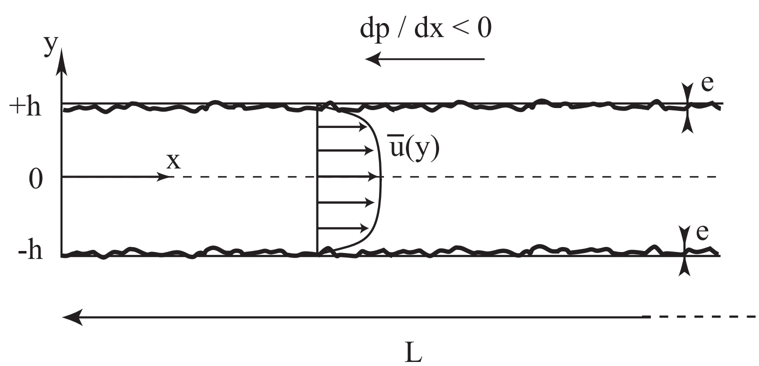

Figure 1: Ecoulement dans un canal plan avec parois rugueuses.

Afin de décrire le profil de vitesse dans le cas turbulent, on utilise le modèle empirique suivant, obtenu en généralisant le profil de Poiseuille laminaire :

$$\overline{u}(y) = U_{max}\left(1 - \left|\frac{y}{h}\right|^n\right). \tag{1}$$

Dans la partie A on cherchera la relation entre l'exposant n et le nombre de Reynolds d'après des mesures expérimentales de perte de charge. Dans la partie B on étudiera les conséquences d'un tel profil sur le modèle de longueur de mélange. **Les parties A et B sont indépendantes.**

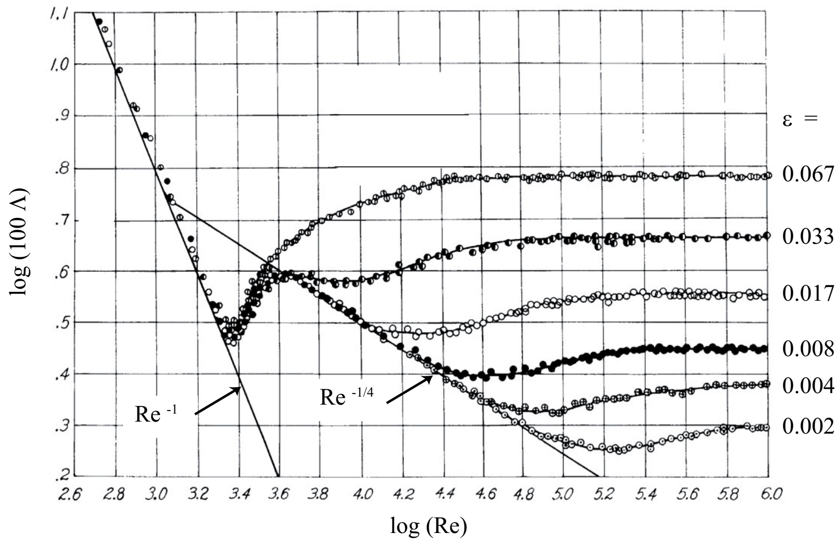

Figure 2: Coefficient de perte de charge Λ en fonction du nombre de Reynolds $Re = 2h\,U_q/\nu$, pour différentes valeurs de rugosité normalisée $\epsilon = e/h$. Figure adaptée des mesures en tube circulaire de Nikuradse (1932).

A- Perte de charge

1. Que vaut l'exposant n pour un écoulement laminaire ? Tracer sur un même graphe l'allure de $\overline{u}(y)$ en fonction de y pour $n = 2$, $n = 4$ et $n \to \infty$. Que pensez-vous de cette limite $n \to \infty$?

2. Calculer la vitesse débitante U_q (vitesse moyenne) en fonction de U_{max} et n. Vérifier que l'on retrouve bien $U_q = 2U_{max}/3$ pour l'écoulement laminaire. Que pensez-vous de la limite U_q/U_{max} pour $n \gg 1$?

3. Exprimer la contrainte τ_0 sur une des plaques, en fonction de η, U_q, h et n (on prendra $\tau_0 > 0$ par convention). En déduire le coefficient de perte de charge linéaire

$$\Lambda = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U_q^2}, \tag{2}$$

en fonction de n et du nombre de Reynolds $Re = 2h\,U_q/\nu$.

La figure 2 représente le coefficient Λ en fonction de Re, pour différentes valeurs de rugosité. Sur cette figure, on distingue 4 régimes :

I- Régime laminaire, pour lequel $\Lambda = C_1 Re^{-1}$;

II- Régime transitionnel ;

III- Régime turbulent sans influence de la rugosité, pour lequel $\Lambda = C_3 Re^{-1/4}$;

IV- Régime turbulent avec influence de la rugosité, pour lequel $\Lambda = \Lambda_t(\epsilon)$, où $\epsilon = e/h$ est le coefficient de rugosité normalisée.

4. A partir de l'expression de Λ trouvée en question 3, déterminer la valeur de C_1.

On se placera dans le régime III pour les questions 5, 6 et 7.

5. Déterminer la relation qui lie l'exposant n à Re et C_3.

6. Montrer que le rapport U_q/U_{max} peut s'écrire sous la forme

$$\frac{U_q}{U_{max}} = 1 - \alpha Re^{-3/4},$$

où α est une constante que l'on identifiera en fonction de C_3. Tracer l'allure de ce rapport en fonction de Re.

7. Rappeler l'expression de la vitesse de friction u^* en fonction de τ_0, puis l'expression de l'épaisseur de sous-couche visqueuse δ_v. En déduire, à partir de l'équation (2), que l'on a

$$\frac{\delta_v}{h} = \beta Re^{-7/8},$$

où β est une constante que l'on identifiera en fonction de C_3.

8. On suppose que, lorsque le nombre de Reynolds augmente, la sous-couche visqueuse s'affine jusqu'à atteindre l'épaisseur de rugosité e : c'est la transition entre les régimes III et IV. Au-delà, c'est la rugosité qui limite l'épaisseur de la sous-couche visqueuse. Montrer que cette transition a lieu lorsque le nombre de Reynolds atteint une valeur critique $Re_c(\epsilon)$ de la forme :

$$Re_c(\epsilon) \propto \epsilon^{\gamma}.$$

Déterminer la valeur de l'exposant γ. Que pensez-vous physiquement de la limite $\epsilon \to 0$?

9. La figure 2 suggère que, dans le régime IV, le coefficient Λ reste approximativement constant et égal à sa valeur à la transition $Re = Re_c(\epsilon)$. Montrer alors que l'on doit avoir

$$\Lambda_t(\epsilon) \propto \epsilon^{\sigma}.$$

Déterminer la valeur de l'exposant σ. Ce résultat vous semble-t-il en accord avec les résultats de la figure 2 ?

B- Modèle de longueur de mélange

1. Ecrire l'équation de Reynolds selon x, en tenant compte des hypothèses faites sur l'écoulement.

2. On suppose le gradient de pression moyen $\partial \overline{p}/\partial x$ indépendant de x et y, et donné par

$$-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} = \frac{\Delta p}{L} > 0.$$

En déduire que la contrainte totale $\tau_{tot}(y) = \tau^v_{xy}(y) + \tau_{xy}(y)$ s'écrit

$$\tau_{tot}(y) = -\tau_0 \frac{y}{h},$$

avec $\tau^v_{xy}(y)$ la contrainte visqueuse et $\tau_{xy}(y)$ la contrainte turbulente. Exprimer τ_0 en fonction de Δp.

3. Par un raisonnement de type "particule déplacé", montrer que $\tau_{xy}(y)$ et $\tau^v_{xy}(y)$ sont de même signe (on pourra se placer dans le demi-canal $y > 0$ pour ce raisonnement).

4. Calculer $\tau_{xy}^v(y)$ d'après le modèle (1). Représenter sur un même graphe l'allure de $\tau_{tot}(y)$, $\tau_{xy}(y)$ et $\tau_{xy}^v(y)$ (faire un graphe pour $n = 2$ et un pour $n \gg 1$). Indiquer quelle est la contrainte dominante dans chaque partie de l'écoulement.

5. On souhaite tester si l'hypothèse de longueur de mélange est compatible avec le profil de vitesse (1). Rappeler ce que représente physiquement la longueur de mélange $\ell_m(y)$. Pour quelles valeurs de y s'attend-on à avoir $\ell_m(y)$ maximale ? minimale ?

6. On modélise la contrainte turbulente sous la forme

$$\tau_{xy}(y) = \rho \nu_t(y) \frac{\partial \overline{u}}{\partial y},$$

avec $\nu_t(y)$ le coefficient de viscosité turbulente tel que

$$\nu_t(y) = \ell_m^2(y) \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right|.$$

Que vaut ℓ_m en $y \simeq 0$ et en $y \to \pm h$, dans le cas $n \gg 1$? Tracer alors l'allure de ℓ_m en fonction de y. Que pensez-vous de ce modèle ?

Question subsidiaire

Dans un canal plan de longueur $L = 200$ m, d'épaisseur $2h = 10$ cm et de rugosité $e = 1$ mm, on souhaite obtenir un écoulement d'eau de vitesse moyenne 3 m/s. Quel différence de pression Δp faut-il imposer ?