Université Paris-Sud **Année 2007-08**
Master 1 de Mécanique-Physique

P-MEC-408B – Examen de Turbulence

Jeudi 17 Avril 2008

Durée : 2 heures - sans document

Sillage turbulent d'un cyclindre

Dans tout ce problème on s'intéresse à un coulement d'eau autour d'un obstacle cylindrique horizontal, de longueur $L = 2$ m (selon z) et de diamètre $D = 0,5$ m. La vitesse de l'eau loin en amont du cylindre est de $U_0 = 3$ m/s selon l'axe x. La longueur du cylindre étant très supérieure à son diamètre, on peut considérer l'écoulement comme statistiquement bidimensionnel dans le plan vertical(x, y).
Les deux parties, A et B, sont indépendantes.

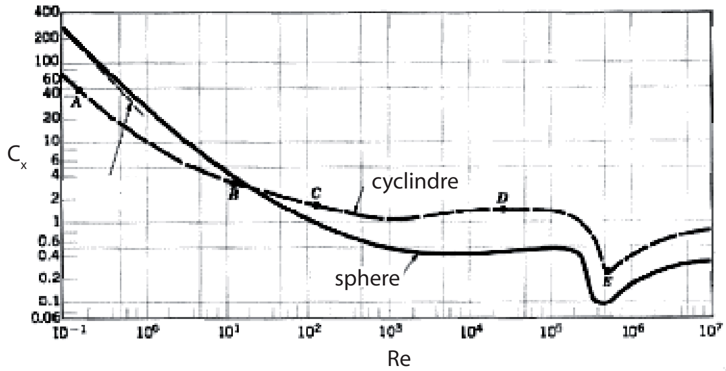

Figure 1: Coefficients de traînée en fonction du nombre de Reynolds pour une sphère et un cylindre.

A. Quelques ordres de grandeur

1. Calculer le nombre de Reynolds $Re = U_0 D/\nu$ ainsi que, en utilisant les données de la figure 1, la force de traînée F_x exercée sur le cyclindre.

2. Calculer la puissance P associée au travail de la force de traînée. En faisant des hypothèses sur la taille caractéristique de la zone turbulente en aval du cylindre, estimer un ordre de grandeur de la puissance dissipée par unité de masse ϵ.

3. Rappeler l'expression de l'échelle de Kolmogorov η en fonction de ϵ et de la viscosité cinématique ν, ainsi que sa signification physique (quelques lignes). En supposant que

les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie sont effectivement vérifiées dans le sillage, donner l'ordre de grandeur de η.

4. En supposant que la contrainte exercée par l'écoulement sur la surface du cylindre est d'ordre $\tau \simeq F_x/DL$, donner l'ordre de grandeur de la vitesse de friction u^* ainsi que l'épaisseur de la sous-couche visqueuse δ_v.

5. En comparant l'échelle de Kolmogorov et l'epaisseur de sous-couche visqueuse, pensez-vous que la contribution dominante à la dissipation ait lieu dans les couches limites ou dans le sillage turbulent ?

B. Loi de décroissance du défaut de vitesse

On s'intéresse maintenant au profil de "défaut de vitesse" $\Delta U(x,y) = U_0 - \overline{u}(x,y)$ en aval du cylindre, où $\overline{u}(x,y)$ est la composante selon x de la vitesse moyenne (figure 2). On se restreint ici au sillage loin du cylindre, $x \gg D$, pour lequel on a $\Delta U(x,y) \ll U_0$. On va chercher en particulier à déterminer l'évolution avec x de ce défaut de vitesse dans l'axe du cylindre, $U_s(x) = \Delta U(x,0)$. On note $\ell(x)$ la demi-largeur du sillage à une distance x du cylindre, et l'on suppose $\ell(x) \ll x$. L'écoulement loin du sillage est considéré comme parfait, et donc la pression p_0 pour $|y| \gg \ell(x)$ est indépendante de x. On suppose enfin que l'ordre de grandeur des fluctuations de vitesse ($\overline{u'v'}$, $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, etc.) à une distance x est donné par $U_s(x)^2$.

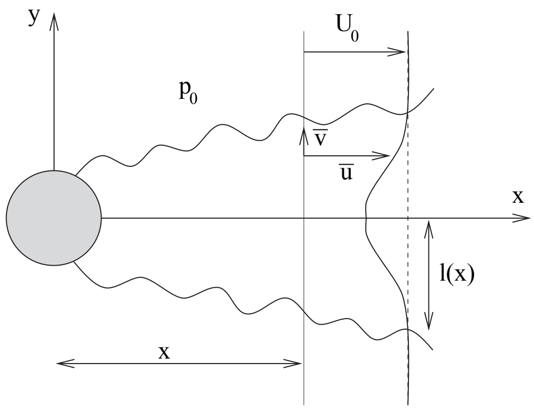

Figure 2: Profil de vitesse dans le sillage d'un cylindre. On note u, v les composantes de la vitesse selon x, y.

1. Donner l'ordre de grandeur de la vitesse verticale $V(x)$ en fonction de $U_s(x)$, $\ell(x)$ et x.

2. Ecrire les équations de Reynolds (RANS) en régime statistiquement stationnaire pour les composantes u et v de la vitesse. Pour chacun des termes I (transport moyen), II (transport turbulent) et III (diffusion visqueuse) on indiquera l'ordre de grandeur de la contribution dominante en fonction de U_0, $U_s(x)$, $\ell(x)$ et x. On n'explicitera pas l'ordre de grandeur du terme de pression.

3. Montrer que le terme visqueux III est négligeable devant le terme de transport turbulent II si $R_\ell(x) = U_s(x)\ell(x)/\nu \gg 1$. On admettra cette hypothèse dans la suite.

4. Montrer que, si $U_0 \ll U_s[x/\ell(x)]^2$, alors l'équation de Reynolds pour $\overline{v}$ se réduit à

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y}.$$

   Calculer le profil de pression moyenne $\overline{p}$, et montrer que l'équation de Reynolds pour $\overline{u}$ peut s'écrire :

$$U_o \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} = -\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}. \tag{1}$$

5. En déduire que la quantité suivante,

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \rho U_0 (U_0 - \overline{u})\, dy, \tag{2}$$

   est indépendant de la distance x. Quelle interprétation physique pouvez-vous proposer pour cette quantité ?

6. On suppose que le sillage vérifie l'hypothèse d'autosimilarité, c'est à dire que les grandeurs ΔU et $\overline{u'v'}$ s'écrivent sous forme d'un produit de $U_s(x)$ et d'une fonction de la coordonnée réduite $Y = y/\ell(x)$:

$$U_0 - \overline{u}(x,y) = U_s(x)\, f(Y) \qquad\qquad \overline{u'v'}(x,y) = U_s^2(x)\, g(Y). \tag{3}$$

   La demi-largeur $\ell(x)$ est définie telle que $\overline{u}(x, y = \ell(x)) = U_0 - U_s/10$. Tracer l'allure des fonctions $f(Y)$ et $g(Y)$ (on discutera en particulier la parité et le comportement asymptotique $Y \to \pm\infty$ de ces fonctions).

7. Montrer à partir de l'équation (2) que $U_s(x)$ est proportionnelle à $1/\ell(x)$. En déduire l'évolution de $R_\ell(x)$, et commenter.

8. En reportant les profils autosimilaires (3) dans l'équation de Reynolds (1), montrer que

$$\frac{1}{U_s(x)}\frac{d\ell}{dx} = cste. \tag{4}$$

   En déduire l'évolution de $U_s(x)$ et $\ell(x)$ en fonction de x. Que pensez-vous de l'hypothèse effectuée en question 4 ?

9. Si l'on souhaitait utiliser un modèle de viscosité turbulente dans ce problème, quel coefficient $\nu_t(x,y)$ choisiriez-vous ? (justifiez votre réponse en quelques lignes) Quelle relation supplémentaire pourrait-on obtenir entre $f(Y)$ et $g(Y)$? Comparer qualitativement avec les tracés de $f(Y)$ et $g(Y)$ de la question 6 et conclure.