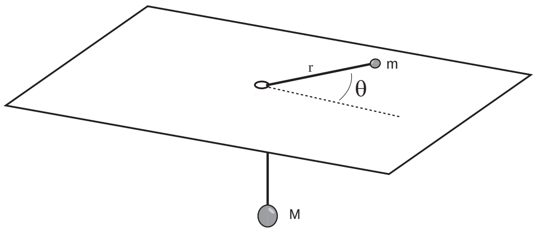
Université Paris-Sud **Année 2007-08**

Licence L3 de Mécanique-Physique

PhysM311 - Mécanique hamiltonienne et dynamique des systèmes

TD 1 : Equations de Lagrange : Révisions

Exercice 1 : Chute de deux billes attachées



On considère deux billes, de masse m et M, attachées entre elles par un fil inextensible de masse négligeable, passant par un petit trou dans un plan horizontal. On note ℓ la longueur totale du fil, et r la longueur du segment horizontal. On note θ l'angle que fait le segment horizontal avec une direction fixe quelconque.

1. Calculer le lagrangien $\mathcal{L} = T - V$ pour les coordonnées généralisées (r, θ).
2. Déterminer la coordonnée cyclique, et reconnaître le moment conjugué qui y est associé. Pourquoi est-il conservé ?
3. En déduire l'équation différentielle du mouvement pour r.
4. On s'intéresse aux premiers instants de la chute. On pose $r = \ell(1 - \epsilon)$, avec $\epsilon \ll 1$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par ϵ. Montrer qu'au-delà d'une certaine valeur de la vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}_0$, la chaîne ne peut pas tomber. Dans le cas où la chaîne tombe, que devient la vitesse angulaire $\dot{\theta}$?

Exercice 2 : Lagrangien et conservation de l'énergie

On considère un système mécanique ne dépendant pas explicitement du temps : le potentiel V est une fonction des coordonnées $\{q_i\}$ uniquement. On a alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0.$$

Calculer la dérivée totale de $\mathcal{L}$ par rapport au temps, et montrer que l'on a

$$\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = \text{cste}.$$

Quelle est cette constante ? (On pourra s'aider en raisonnant avec une particule à 1 degré de liberté dans un potentiel $V(x)$). Que devient ce résultat dans le cas d'un potentiel dépendant explicitement du temps ?

Exercice 3 : Le mirage

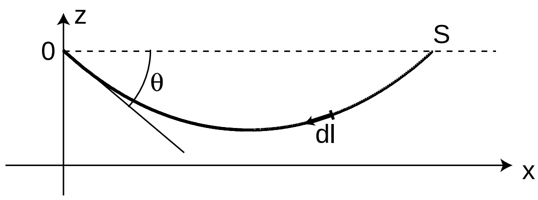
Selon le principe de Fermat, un rayon lumineux suit la trajectoire qui minimise son temps de parcours. Dans un milieu d'incide n, le temps pour aller de A à B à la vitesse c/n est donc

$$T = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{n(l)}{c} dl.$$

Au-dessus d'un sol fortement chauffé, le gradient de densité de l'air induit par le gradient de température implique un gradient d'indice, que l'on suppose varier linéairement avec l'altitude z :

$$n(z) = n_0(1 + \alpha z),$$

où $\alpha > 0$. Un observateur en O voit le rayon lumineux issu de S (distant de d) suivant un angle θ avec l'horizontale.



1. Après avoir exprimé l'élément de longueur infinitésimal dl en fonction de dz et $\dot{x} = dx/dz$, exprimer le temps de parcours du rayon lumineux sous la forme

$$T = \frac{n_0}{c} \int_O^S f(x, \dot{x}, z)\, dz.$$

2. En utilisant le principe de Hamilton, en déduire l'équation différentielle vérifiée par la trajectoire. Exprimer l'angle d'incidence θ dans la limite $\alpha d \ll 1$.

Université Paris-Sud **Année 2007-08**
Licence L3 de Mécanique-Physique

PhysM311 - Mécanique hamiltonienne et dynamique des systèmes

TD 2 : Portraits de phase, équations de Hamilton

1. L'oscillateur linéaire

On considère une masse ponctuelle m reliée à un point fixe par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k, de longueur à vide l_0. Le système présente un seul degré de liberté : la masse se translate horizontalement.

1. Ecrire et tracer le potentiel $V(x)$ associé à la force de rappel exercée par le ressort sur la masse ponctuelle.
2. Donner le Lagrangien de ce système, et en déduire le Hamiltonien et les équations de Hamilton. Exprimer la pulsation des oscillations ω. Montrer que le système est conservatif.
3. Etablir le portrait de phase de ce système dans le plan (q, p).

2. Chute libre

On considère une masse ponctuelle en chute libre dans le champ de pesanteur g, repérée par sa coordonnée vertical z.

1. Ecrire les équations de Hamilton.
2. Représenter, dans l'espace des phases (z, p), les flèches $(\dot{z}, \dot{p})$ représentant l'évolution du système en différents points (la "vitesse" dans l'espace des phases). En déduire qualitativement l'allure des trajectoires dans cet espace.
3. Une trajectoire d'énergie E donnée est décrite par l'équation $H(z, p) = E$. En déduire l'allure des courbes $p = f(z)$.
4. Représenter les trajectoires dans le cas d'une masse rebondissant sans dissipation sur le sol (situé en $z = 0$).

3. Coordonnée cyclique

Donnez un exemple de système physique pour lequel le Hamiltonien $H(q, p)$ est indépendant de la coordonnée q. Montrer que p est constant, et que q augmente linéairement. Tracer la trajectoire du système dans les cas $H(q, p) = p$; $H(q, p) = p^2$.

4. Points fixes elliptiques ou hyperboliques

On considère un système à 1 degré de liberté gouverné par le système différentiel suivant

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha q \\ \beta p \end{pmatrix},$$

En supposant que ce système soit conservatif, calculer le Hamiltonien et trouver une relation entre les paramètres α et β. Tracer l'allure du portrait de phase.

Mêmes questions pour le système

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha p \\ \beta q \end{pmatrix}.$$

5. Quelques portraits de phase

Pour chacun des 3 potentiels $V(x)$ représentés ci-dessous, identifier les points elliptiques et hyperboliques, et tracer l'allure des différentes orbites dans le plan coordonnée-impulsion.

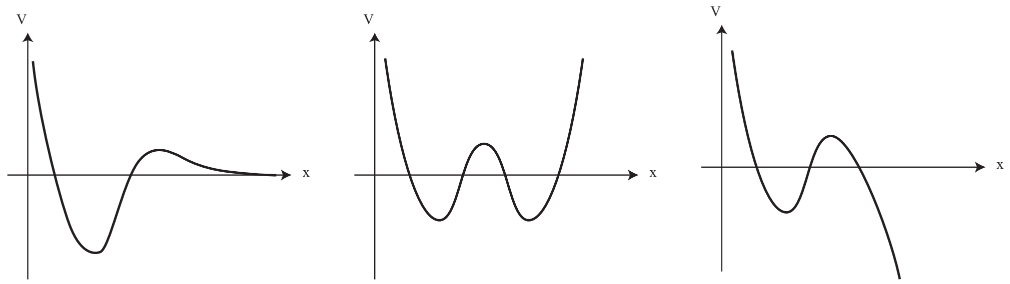


Figure 1: Quelques potentiels.

6. Le pendule simple

On considère un pendule de masse m relié à un point fixe par l'intermédiaire d'une tige inextensible de longueur l et de masse négligeable.

1. En utilisant la coordonnée généralisée θ, donner le moment conjugué p et écrire le Hamiltonien du système.
2. Dans quelles conditions l'oscillateur peut-il être approché par un oscillateur linéaire ? Etablir le portrait de phase de cet oscillateur dans le cas général (non linéaire).
3. Que se passe-t-il lorsque le pendule part du point le plus bas ? Que se passe-t-il lorsqu'on lâche le pendule du point le plus haut, à vitesse nulle ?

7. De la formulation Lagrangienne à la formulation Hamiltonienne

Pour chaque Lagrangien suivant, décrivant un système à un degré de liberté (coordonnée généralisée q), donnez le Hamiltonien correspondant, et écrivez les équations de Hamilton :

1. $\mathcal{L}(q) = e^q$
2. $\mathcal{L}(\dot{q}) = (1-\dot{q})^{1/2}$
3. $\mathcal{L}(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2}e^{\alpha t}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)$.

Université Paris-Sud **Année 2007-08**

Licence L3 de Mécanique-Physique

PhysM311 - Mécanique hamiltonienne et dynamique des systèmes

TD 3 : Equations de Hamilton

1. Trajectoire 1D guidées

On considère une masse poncuelle dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, astreinte à se deplacer dans frottement le long d'une courbe d'équation $z = f(x)$ (la courbe est dans le plan vertical).

1. Ecrire le Lagrangien du système sous la forme $\mathcal{L}(z, \dot{z}) = \frac{1}{2}mG(z)\dot{z}^2 - V(z)$, où $G(z)$ est une fonction que l'on exprimera.

2. Exprimer le moment conjugué p et en déduire le Hamiltonien $H(z, p)$. Les trajectoires dans les plans $(z, \dot{z})$ et (z, p) coïncident-elles ?

2. Une bille sur un fil tournant

Une bille de masse m est contrainte à se déplacer sans frottement le long d'un fil rigide d'équation $z(x) = x^2/2R$ contenu dans un plan vertical. La bille est soumise au champ de pesanteur g. De plus, le plan contenant le fil est mis en rotation autour de l'axe vertical passant par l'origine, à vitesse angulaire constante Ω.

1. Montrer que le Hamiltonien de ce système s'écrit

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m(1 + (x/R)^2)} + \frac{1}{2}mx^2(\omega^2 - \Omega^2),$$

   avec $\omega = \sqrt{g/R}$ une pulsation dont on donnera la signification physique.

2. Représenter l'allure des trajectoires dans le plan (x, p), dans les cas $\Omega < \omega$ et $\Omega > \omega$.

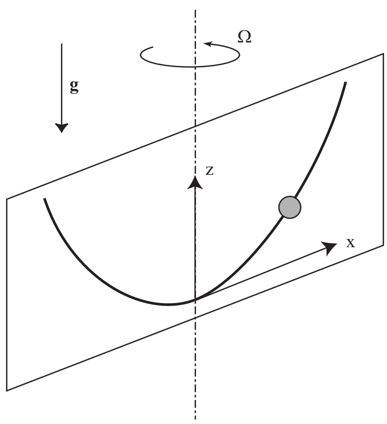
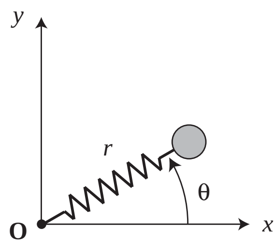


Figure 2: Une bille sur un fil tournant.

3. Un oscillateur bidimensionnel

Une bille de masse m, considérée comme ponctuelle, est fixée à l'extrémité d'un ressort de longueur nulle et de coefficient de raideur k. La bille est astreinte à rester dans le plan horizontal (x, y), et son poids (selon z) n'intervient donc pas.

1. A combien d'équations de Lagrange se problème conduit-il ? A combien d'équations de Hamilton ? Quelle est la dimension de l'espace des phases ?
2. Exprimer le Hamiltonien $H(x, p_x, y, p_y)$ en coordonnées cartésiennes. En posant $X = (x, p_x, y, p_y)$ le vecteur désignant l'état du système dans l'espace des phases, écrire les équations de Hamilton sous forme matricielle
$$\frac{dX}{dt} = MX,$$
où M est une matrice 4×4 que l'on exprimera.
3. Intégrer les équations du mouvement, et montrer que la solution est une trajectoire elliptique. Montrer que la quantité la $xp_y - yp_x$ est conservée ; interprétation ?
4. Exprimer le Hamiltonien $H(r, p_r, \theta, p_\theta)$ en coordonnées polaires, et montrer que $p_\theta =$ cste. A quoi ressemble l'allure de la "trajectoire" du système dans l'espace (r, p_r, θ) ?



4. Particule chargée dans un champ électromagnétique

On considère une particule de masse m et de charge e plongée dans un champ magnétique $\vec{B}$ et un champ électrique $\vec{E}$. Sa position est repérée par le vecteur $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ et sa vitesse par le vecteur $\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$.

Les champs $\vec{B}$ et $\vec{E}$ sont décrits à l'aide des potentiels vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t) = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$ et scalaire $\Phi(\vec{r}, t)$:
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

1. Rappeler l'expression de la force de Lorentz $\vec{F}$ qui s'exerce sur la particule (somme des forces de Coulomb et de Laplace).
2. Montrer que la force de Lorentz "dérive" du potentiel généralisé $V = e(\Phi - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A})$, dans le sens :
$$F_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{r}_i} - \frac{\partial V}{\partial r_i}.$$
3. Ecrire le Lagrangien L en fonction des composantes de $\vec{A}$ et $\vec{r}$ et éventuellement de leurs dérivées temporelles.
4. Exprimer le moment $\vec{p}$ canoniquement conjugué à $\vec{r}$.
5. Ecrire le Hamiltonien H en fonction de Φ et des composantes de $\vec{p}$ et de $\vec{A}$, et écrire les équations de Hamilton.
6. Reprendre l'exercice en coordonnées cylindriques ; en coordonnées sphériques.

5. Hamiltonien d'un système à n degrés de liberté

Un système à n degrés de liberté, décrit par les coordonnées généralisées $(q_1, q_2...q_n)$, a pour Lagrangien

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{1}{2}G(q_i, t)\dot{q}_j\dot{q}_j + F_j(q_i, t)\dot{q}_j - V(q_i, t)$$

(avec sommation implicite sur l'indice répété j). Exprimer le Hamiltonien $H(q_i, p_i, t)$.

Université Paris-Sud **Année 2007-08**
Licence L3 de Mécanique-Physique

PhysM311 - Mécanique hamiltonienne et dynamique des systèmes

TD 4 : Transformations canoniques

1. Transformation canonique linéaire

On considère un système dynamique à 1 degré de liberté, décrit par la coordonnée q et l'impulsion p. On considère la transformation $(q, p) \to (Q, P)$ suivante :

$$Q = q + \alpha p, \qquad P = p + \beta q.$$

1. Calculer le Jacobien $\partial(Q, P)/\partial(q, p)$ de cette transformation, et déterminer une condition sur α, β pour que cette transformation soit canonique.
2. Représenter dans le plan (q, p) cette transformation, et interprétez géométriquement la condition de conservation des aires (théorème de Liouville).
3. Si q est une coordonnée cyclique, à quelle condition Q l'est-elle également ?

2. Fonction génératrice

Montrer que la transformation

$$Q = \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right), \qquad P = q \cot p$$

est une transformation canonique. Déterminer la fonction génératrice $F_1(q, Q)$ associée (on rappelle que F_1 est définie telle que $p = \partial F_1/\partial q$, $P = -\partial F_1/\partial Q$).

3. L'oscillateur harmonique

On rappelle le Hamiltonien d'un oscillateur harmonique à 1 dimension,

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2,$$

où $\omega = \sqrt{k/m}$ est la pulsation propre. On souhaite effectuer une transformation $(q, p) \to (\theta, J)$ afin de faire apparaître un couple de coordonnées "angle - action". On propose la transformation suivante, exprimée à l'aide de la fonction génératrice

$$F_1(q, \theta) = \lambda\omega q^2 \cot\theta.$$

1. Exprimer les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes.
2. Exprimer le Hamiltonien $K(\theta, J)$ en fonction des nouvelles coordonnées. A quelle condition sur λ le couple (θ, J) est-il bien du type "angle-action" (c'est-à-dire que θ est bien une coordonnée cyclique) ?
3. Déduisez-en les équations du mouvements en coordonnées (θ, J), puis en coordonnées (q, p).

4. Transformation quadratique

On reprend le Hamiltonien de l'oscillateur harmonique précédent, et l'on effectue une transformation $(q,p) \rightarrow (Q,P)$ telle que $Q = q^2$. Exprimer le moment conjuqué P ainsi que le nouvel Hamiltonien $H'(Q,P)$. Exprimer les équations du mouvement en représentation (Q,P), puis (q,p).

5. Système à 2 degrés de liberté

On considère un système à 2 degrés de liberté (q_1, q_2) décrit par un Hamiltonien $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$. Montrer que la transformation $(q_1, q_2, p_1, p_2) \rightarrow (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ suivante,

$$Q_1 = q_1, \quad P_1 = p_1 - 2p_2, \tag{1}$$
$$Q_2 = p_2, \quad P_2 = -2q_1 - q_2, \tag{2}$$

est canonique, c'est-à-dire qu'il existe une fonction génératrice $F(q_1, q_2, p_1, p_2, Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ et un nouvel Hamiltonien $H'(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ tels que

$$\dot{q}_1 p_1 + \dot{q}_2 p_2 - H = \dot{Q}_1 P_1 + \dot{Q}_2 P_2 - H' - \frac{d}{dt} F.$$

Université Paris-Sud **Année 2007-08**
Licence L3 de Mécanique-Physique

PhysM311 - Mécanique hamiltonienne et dynamique des systèmes

TD 5 : Interactions électromagnétiques, perturbations adiabatiques

1. Intéractions électromagnétiques

On considère la trajectoire d'un électron, de masse m et de charge électrique $q = -e$, dans un champ électrique $\vec{E}(\vec{x}, t) = E_0 \sin(kx - \omega t)\vec{e}_x$. Le principe fondamental de la dynamique, selon la direction $\vec{e}_x$, s'écrit donc

$$m\frac{dv}{dt} = -eE_0 \sin(kx - \omega t).$$

1. Montrer que l'équation du mouvement peut se réécrire sous forme canonique, en introduisant le couple de variables (I, ϕ) suivant :
$$I = kv - \omega, \qquad \phi = kx - \omega t.$$
2. Exprimer le Hamiltonien obtenu précédemment sous la forme
$$H(I, \phi) = \frac{1}{2}I^2 - \Omega_0^2 \cos\phi,$$
où l'on exprimera la pulsation Ω_0 en fonction de k, e, E_0 et m. Discuter l'allure des trajectoires dans l'espace des phases (I, ϕ), en raisonnant par analogie avec le pendule simple (TD2, ex.6).
3. Montrer que, pour des faibles valeur de l'énergie, cet Hamiltonien redonne celui de l'oscillateur linéaire,
$$H_0(I, \phi) = \frac{1}{2}I^2 + \frac{1}{2}\Omega_0^2\phi^2$$
4. On introduit la transformation canonique $(I, \phi) \to (J, \theta)$, permettant de réécrire cet Hamiltonien H_0 en variables "angle-action" (cf. TD4, ex.3) :
$$I = \sqrt{2J\Omega_0}\cos\theta, \qquad \phi = \sqrt{2J/\Omega_0}\sin\theta.$$
Exprimer $H_0(J, \theta)$, ainsi que les équations de Hamilton pour correspondantes.
5. En considèrant maintenant le premier terme non quadratique du développement limité du Hamiltonien $H(I, \phi)$, montrer que l'on peut décomposer le Hamiltonien total sous la forme :
$$H(J, \theta) = H_0(J) + V(J, \theta)$$
où l'on exprimer la perturbation $V(J, \theta)$.
6. Calculer la moyenne sur l'angle θ de cet Hamiltonien, $\langle H\rangle_\theta$, en fonction de J. On rappelle
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^4\theta \, d\theta = \frac{3}{8}.$$
En exprimant les équations de Hamilton pour les variables (J, θ) appliqué à cet Hamiltonien moyenné $\langle H\rangle_\theta$, exprimer la pulsation Ω en fonction de la pulsation Ω_0 des petites oscillations et de l'énergie du système.

Université Paris-Sud **Année 2007-08**

Licence L3 de Mécanique-Physique

PhysM311 - Mécanique hamiltonienne et dynamique des systèmes

TD 6 : Variables angle-action, perturbations adiabatiques

1. Rebonds élastiques

Une bille de masse m rebondit de manière parfaitement élastique entre deux plaques planes parallèles situées en $x = 0$ et $x = d$. On note v la vitesse de la bille selon x, et l'on néglige la gravité dans ce problème.

1. Tracer l'allure du la trajectoire dans l'espace des phases (x, p), où $p = mv$ est la quantité de mouvement.
2. Calculer l'aire la courbe fermée dans l'espace (x, p) en fonction de l'énergie E.
3. On souhaite décrire l'évolution du système en utilisant un couple angle-action (θ, I). En raisonnant sur la conservation des aires dans l'espace des phases, donner l'expression de l'action I.
4. Exprimer l'énergie E en fonction l'action I, et en déduire la pulsation ω et la période T.
5. On suppose que le mur de droite se rapproche lentement du mur de gauche, $d(t) = -Vt$, avec $V \ll v$. On admet que, dans ces conditions, l'action I est un invariant adiabatique de cette transformation. Décrire l'évolution de l'énergie $E(t)$ et de la période $T(t)$.
6. L'énergie de la bille est-elle conservée ?

2. Oscillations dans un puits de potentiel

On considère le mouvement à 1 degré de liberté d'une particule de masse m soumise à une force dérivant du potentiel

$$V(x) = U \tan^2(\alpha x).$$

1. Tracer l'allure de $V(x)$, ainsi que l'allure de la trajectoire dans l'espace des phases (x, p) pour différentes valeurs de l'énergie E.
2. On souhaite écrire le Hamiltonien en fonction des variable angle-action (θ, I). En raisonant sur la conservation des aires dans l'espace des phases (théorème de Liouville), donner l'expression de l'action I comme une intégrale entre les bornes $-x_0$ et x_0 des oscillations.
3. On donne
$$\int_0^{x_0} \sqrt{E - U \tan^2 \alpha x}\, dx = \frac{\pi}{2\alpha}(\sqrt{E + U} - \sqrt{U})$$
où x_0 est tel que $U \tan^2 \alpha x_0 = E$. Exprimer l'action I, puis le Hamiltonien $H(I, \theta)$
4. A partir des équations de Hamilton, en déduire la pulsation ω des oscillations.
5. Dans le cas $E \gg U$, en raisonant par analogie avec l'exercice précédent, décrire qualitativement le mouvement de la bille lorsque α augmente lentement au cours du temps.

3. Oscillateur harmonique à fréquence lentement variable

On considère un oscillateur harmonique de pulsation $\omega(t)$ dépendant du temps, de Hamiltonien

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)q^2.$$

On suppose que la variation de ω est lente comparée à la période d'une oscillation, et l'on pose $\omega(t) = \omega_0(1+\epsilon\omega_0 t)$, avec $\epsilon \ll 1$: la perturbation peut donc être considérée comme adiabatique.

1. Retrouver l'action I de l'oscillateur non perturbé (avec $\epsilon = 0$) en fonction de son énergie E et de ω_0. On rappelle que l'aire d'une ellipse de demi-axes a et b est πab.

2. Exprimer les anciennes variables (p,q) en fonction des nouvelles (I,θ), ainsi que le nouvel Hamiltonien $K_0(I,\theta)$.

3. On considère maintenant le cas de l'oscillateur perturbé, $\epsilon \neq 0$. On rappelle que la fonction génératrice de la transformation $(p,q) \to (I,\theta)$ est donnée par

   $$F_1(q,\theta,t) = \frac{1}{2}m\omega(t)q^2 \cot\theta.$$

   Dans le cas d'une transformation dépendante du temps, le nouvel Hamiltonien est donné par

   $$K(I,\theta,\epsilon) = K_0(I,\theta) + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

   Exprimer $K(I,\theta,\epsilon)$.

4. A partir des équations de Hamilton, exprimer $\dot{\theta}(t)$ et $\dot{I}(t)$. Tracer leur allure, et comparer au cas non perturbé.

Université Paris-Sud **Année 2007-08**

Licence L3 de Mécanique-Physique

PhysM311 - Mécanique hamiltonienne et dynamique des systèmes

TD 7 : Variables angle-action, perturbations

1. Quelques exemples d'oscillateurs anharmoniques

On considère un oscillateur anharmonique à 1 degré de liberté décrit par le Hamiltonien (unité de masse $m = 1$) :

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 q^2 + \epsilon H_1(q,p),$$

où $\epsilon \ll 1$ est le paramètre décrivant l'amplitude de la perturbation, et ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur harmonique non perturbé ($\epsilon = 0$). Trouver la pulsation de l'oscillateur perturbé $\omega(E)$, au premier ordre en ϵ, dans les situations suivantes :

$$H_1(q,p) = \frac{1}{3}q^3, \qquad H_1(q,p) = \frac{1}{4}q^4, \qquad H_1(q,p) = q^4 + \alpha q p^2$$

2. Encore un pendule non linéaire

On considère le Hamiltonien du pendule non linéaire suivant,

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \alpha p \sin q$$

avec $\alpha > 0$.

1. A partir des équations de Hamilton, identifier un point fixe stable (p_0, q_0) dans l'espace des phases, tel que $d(p,q)/dt = 0$.
2. Afin d'étudier la dynamique de ce système au voisinage de ce point fixe, on effectue la transformation canonique $p = p_0 + P$, $q = q_0 + Q$. Montrer que le nouvel Hamiltonien $K(P,Q)$ s'écrit, à l'ordre 4 en Q, P,
$$K(P,Q) = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\alpha^2 Q^2 - \frac{1}{2}\alpha P Q^2 - \frac{1}{24}m\alpha^2 Q^4.$$
3. On fait apparaître dans $K(P,Q)$ le Hamiltonien de l'oscillateur harmonique, $K_0(P,Q) = P^2/2m + m\alpha^2 Q^2/2$. Rappeler l'expression des variables angle-action (I, θ) pour K_0, et exprimer $K(I,\theta)$.
4. Exprimer le Hamiltonien moyenné sur une période, $\bar{K}(I)$, et en déduire la pulsation des oscillations en fonction de l'énergie.

3. Rebonds sur un support mobile

Une balle de masse m, repérée par son altitude $q(t)$, rebondit verticalement sur un plateau horizontal dont la position varie selon une loi $h(t)$. On choisit comme coordonnée généralisée la hauteur Q de la balle au-dessus du plateau. On considère la transformation $(q,p) \to (Q,P)$ suivante

$$Q = q - h(t), \qquad P = p - m\dot{h}(t),$$

1. Montrer que cette transformation conserve les aires dans l'espace des phases.
2. Trouver la fonction génératrice $F_2(P, q, t)$ pour cette transformation (on rappelle que $Q = \partial F_2/\partial P$, $p = \partial F_2/\partial q$).
3. Exprimer le Hamilton $H(q, p)$ du système entre deux impacts sur le plateau (les impacts eux-mêmes ne sont pas décrits par le Hamiltonien), et en déduire le nouvel Hamiltonien $K(Q, P, t)$ (on remarquera que le Hamiltonien est défini à une fonction près ne dépendant que du temps).
4. On suppose que le plateau est animé d'un mouvement uniformément accéléré, $\ddot{h} = cste$. En déduire la variable action en fonction de l'altitude maximum du rebond Q_{max}. Décrire qualitativement l'évolution de Q_{max} si l'accélération $\ddot{h}$ augmente lentement.

4. Particule dans un puits de potentiel

Une particule de masse m à 1 degré de liberté se déplace dans un puits de potentiel de la forme

$$V(q) = U(e^{-2\alpha|q|} - 2e^{-\alpha|q|}),$$

où $\alpha > 0$.

1. Tracer l'allure de $V(q)$, et donner l'intervalle d'énergie E pour lequel le mouvement est borné.
2. Si l'on suppose que U est varié lentement au cours du mouvement, entre U_0 et $2U_0$, montrer que la pulsation finale est donnée par

$$\omega_f = \omega_0 + (2 - \sqrt{2})\alpha\sqrt{\frac{U_0}{m}}.$$

On donne l'intégrale suivante :

$$\int_{q_1}^{q_2} [E - U(e^{-2\alpha|q|} - 2e^{-\alpha|q|})]^{1/2} dq = \frac{\pi}{\alpha}(\sqrt{U} - \sqrt{-E}),$$

où $q_{1,2}$ sont les points où s'annule l'intégrant.

5. La molécule d'hydrogène

On modélise une molécule diatomique comme deux atomes soumis à une interaction attractive de la forme $V(r) = kr^2/2$. On considère pour simplifier le problème comme étant bidimensionnel, décrit par les coordonnées cartésiennes (r, θ). On s'intéresse aux deux pulsations, radiale ω_r et angulaire ω_θ, de ce système.

1. Ecrire le Lagrangien du système, calculer les moments p_r et p_θ conjugués aux coordonnées r et θ, et en déduire le Hamiltonien $H(p_r, p_\theta, r, \theta)$.
2. On cherche à identifier les 2 couples angle-action du problème, (I_θ, ϕ_θ) et (I_r, ϕ_r).
   (a) Justifier que la première action, I_θ, coincide avec p_θ. Que vaut l'angle conjugué ϕ_θ ?
   (b) Calculer la seconde action I_r en fonction de I_θ et de l'énergie E. On pourra utiliser le résultat

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(-A + \frac{2B}{x} - \frac{C}{x^2}\right)^{1/2} dx = \pi(BA^{-1/2} - C^{1/2}),$$

   où x_1, x_2 sont les deux zéros de l'integrant.
   (c) Montrer que le Hamiltonien s'écrit finalement

$$H(I_r, I_\theta) = \sqrt{\frac{k}{m}}(2I_r + I_\theta)$$

3. Comment sont reliées les pulsations angulaires et radiales ? Interprétez physiquement ce résultat, à partir du tracé de l'allure de la trajectoire dans le plan.

Université Paris-Sud **Année 2007-08**
Licence L3 de Mécanique-Physique

PhysM311 - Mécanique hamiltonienne et dynamique des systèmes

TD 8 : Perturbations adiabatiques, oscillations rapides

1. Pendule oscillé rapidement

On considère un système décrit par un Hamiltonien $H_0(q, p)$, auquel on ajoute une perturbation oscillant rapidement. Le nouvel Hamiltonien s'écrit

$$H(q, p, t) = H_0(q, p) + V(q) \sin \omega t$$

La théorie des perturbations pour des oscillations rapides permet de montrer que le mouvement moyen est décrit par le Hamiltonien

$$K(\bar{q}, \bar{p}) = H_0(\bar{q}, \bar{p}) + \frac{1}{4\omega^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \bar{q}} \right)^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial \bar{p}^2}$$

On souhaite appliquer ce résultat au cas du pendule simple de longueur ℓ, dont le point d'attache est oscillé rapidement, avec une pulsation $\omega \gg \sqrt{g/\ell}$ et une amplitude a. Le Hamiltonien est donné par

$$H(\theta, p) = \frac{p^2}{2m} - mg\ell \left(1 + \frac{a\omega^2}{g} \sin \omega t \right) \cos \theta.$$

Déterminer les positions d'équilibre pour ce pendule, et préciser lesquelles sont stables ou instables.

2. Particule dans un champ dipolaire oscillant

On considère une particule, de masse m et de charge e, astreinte à se déplacer sur l'axe x. Sur cet axe est disposé un dipole, constitué de deux charges $+e$ et $-e$ situées en $x = -a$ et $+a$ respectivement. On rappelle le potentiel d'interaction entre deux particules distantes de r, $V(r) = q_1 q_2/(4\pi\epsilon_0 r)$.

1. Donner l'expression du potentiel effectif $V_{eff}(x)$ ressenti par la particule loin du dipôle ($x \gg a$). La force qui en dérive est-elle attractive ou répulsive ?

2. On suppose maintenant que les deux particules du dipôle effectuent des oscillations rapides, $a(t) = a_0 \sin \omega t$. En appliquant le même résultat que dans l'exercice précédent, montrer que la particule est maintenant soumise à un potentiel moyen en $1/x^6$.

3. La force séculaire dérivant de ce potentiel moyen est-elle attractive ou répulsive ? Interprétez physiquement ce résultat.