

## Examen de Méthodes expérimentales en mécanique des fluides

Mardi 30 Avril 2002

**Durée : 3 heures - sans document**

### Exercice 1 : Traitement d'images

#### 1. Opération de filtrage

- 1.a Donner la matrice d'un filtre ( $3 \times 3$ ) réalisant un moyennage sur le voisinage. Comment nomme-t-on un tel filtre et quelle en est la conséquence visuelle?
- 1.b Donner l'image transformée après application d'un tel filtre à l'image originale suivante  $f(x, y)$ . Que pouvez vous proposer comme solution pour traiter les bords? Quelle est l'opération mathématique que vous réalisez en appliquant ce filtre?

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 10 & 3 \\ 5 & 20 & 20 & 6 & 3 \\ 5 & 16 & 30 & 6 & 3 \\ 5 & 10 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

#### 2. Détermination de fonctions d'inter-corrélation et d'auto-corrélation en PIV

- 2.a Rappeler brièvement le principe de la PIV. Le traitement des images obtenues après acquisition doit permettre de déterminer précisément un champ de vitesse. Définissez précisément ce que représente chaque vecteur vitesse.
- 2.b **L'analyse par auto-corrélation**  
Dans cette technique de traitement des images, on traite une seule image qui contient des enregistrements multiples de particules. On considère que l'on réalise deux enregistrements sur une même image : l'un à un temps  $t_1$  et le suivant à  $t_2$ . Soit  $i(x, y)$  l'image de l'ensemble des particules à  $t_1$  et soit  $d(x, y)$  l'image que l'on doit traiter qui résulte de la superposition de  $i(x, y)$  et de  $j(x, y) = i(x, y)$  prise à  $t_2$ . On considère que les particules se sont déplacées de  $(\Delta x, \Delta y)$  pendant  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Donner  $d(x, y)$  en fonction de  $i(x, y)$ .
- 2.c Donner le spectre d'énergie de  $d(x, y)$  où le module au carré de sa transformée de Fourier  $D(u, v)$ .
- 2.d Donner la fonction d'auto-corrélation  $\Gamma(x, y)$  de  $d(x, y)$ . On précisera la propriété de la transformée de Fourier que l'on utilise.
- 2.e La fonction d'auto-corrélation  $H(x, y)$  de l'ensemble des points de l'image à  $t_1$  (nommé aussi le Halo d'intensité) est une Gaussienne. En déduire une représentation qualitative de la fonction  $\Gamma$ . Quelle remarque pouvez vous faire sur cette méthode?
- 2.f **L'analyse par inter-corrélation**  
On traite dans cette technique, deux fenêtres extraites de deux images enregistrées à deux instants successifs  $t_1$  et  $t_2$ . Soit  $i_1(x, y)$  l'image à  $t_1$  et  $i_2(x, y)$  la même image à  $t_2$ . Soient respectivement  $I_1$  et  $I_2$  les transformées de Fourier de ces images. Calculer  $g(x, y)$  la fonction d'inter-corrélation de ces deux images, où  $g(x, y) = i_1(x, y) * i_2(x, y)$  avec  $*$  l'opérateur de convolution. Représenter qualitativement  $g(x, y)$ .

### 3. Amélioration d'une image par traitement par transformée de Fourier

Dans la figure (1) sont représentées 4 images. L'image (a),  $f(x, y)$ , à cause d'un problème d'acquisition et d'illumination, présente un effet "tôle ondulée" que l'on souhaite supprimer. Cet effet se traduit par une superposition de l'image  $i(x, y)$  avec un motif sinusoïdal suivant une direction ( $Ox$ ):  $b(x, y) = A \cos(2\pi\nu_0 x)$  telle que l'on ait:  $f(x, y) = i(x, y) + b(x, y)$ . L'image (b) représente le module de la transformée de Fourier de  $f(x, y)$ . L'origine du plan des fréquences ( $u = 0, v = 0$ ) est située au centre de l'image.

- 3.a Expliquer pourquoi on observe deux points blancs lumineux et symétriques au centre de l'image.  
 3.b Expliquer ce que représentent les images (c) et (d).

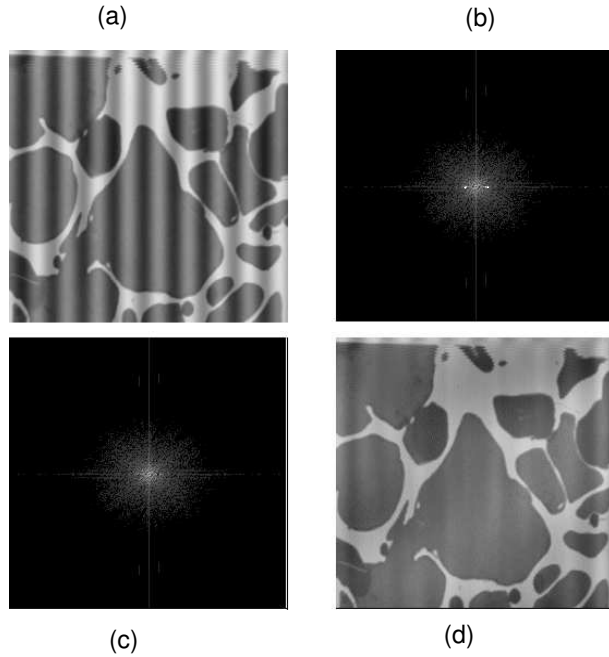


FIG. 1 –

### 4. Transformée de Fourier discrète

Soit l'image représentée à la figure (2). Cette image digitale ( $128 \times 128$ ) est définie par  $f(x, y)$  telle que :

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{pour } 0 \leq x \leq 64 \text{ et } 0 \leq y \leq 127. \\ 0, & \text{partout ailleurs.} \end{cases}$$

- 4.a Montrer que  $F(u, v)$  la transformée de Fourier discrète de  $f(x, y)$  s'écrit :

$$F(u, v) = e^{-i\pi u/2} \frac{1}{128} \frac{\sin(\frac{\pi u 65}{128})}{\sin(\frac{\pi u}{128})} \frac{\sin(\pi v)}{\sin(\frac{\pi v}{128})}.$$

On rappelle que

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1 - a^n}{1 - a}.$$

- 4.b En déduire la représentation du spectre d'énergie de  $f(x, y)$  dans le plan des fréquences ( $u, v$ ) avec le point  $(0, 0)$  au centre de la représentation.

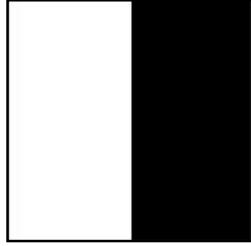


FIG. 2 –

### 5. Amélioration d'une image

Soit l'image représentée à la figure (3). Les contours des structures cristallines sont mal définis.

- 5.a Que pouvez vous proposer pour mieux les identifier?
- 5.b Que pouvez vous proposer pour corriger les défauts d'illumination?

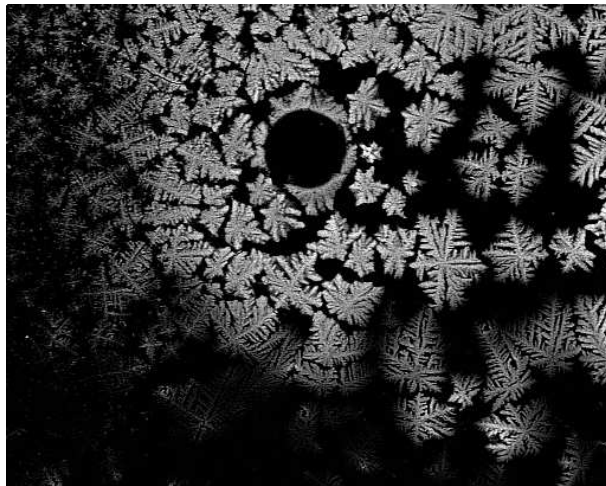


FIG. 3 –

## Exercice 2 : Vélométrie Doppler Ultrasonore

Le principe de base du Vélométrie Doppler Ultrasonore (UDV) est le même que celui du Vélométrie Laser Doppler (LDV) : on mesure le décalage Doppler subi par une onde diffusant sur des petites particules ensemençant l'écoulement. Un transducteur pouvant fonctionner alternativement en émetteur ou en récepteur envoie une brève impulsion acoustique de quelques longueurs d'onde, puis mesure l'écho diffusé par les particules en mouvement situées le long de l'axe acoustique.

On considère un écoulement d'eau de vitesse moyenne  $\bar{u} \simeq 1$  m/s, dans un canal de hauteur  $h = 10$  cm. L'onde acoustique utilisée est monochromatique de fréquence  $f_0 = 1$  MHz, et se propage à la vitesse du son dans l'eau ( $c = 1480$  m/s). On suppose que le faisceau acoustique fait un angle  $\alpha = 30^\circ$  avec la direction de l'écoulement moyen, et que sa largeur est de l'ordre du diamètre du transducteur,  $D = 8$  mm. On considère dans un premier temps l'effet de la diffusion sur une seule petite particule se déplaçant à vitesse  $\vec{v}$ , située à une distance  $x = 10$  cm le long de l'axe acoustique.

1. Calculer la longueur d'onde  $\lambda_0$  de l'onde acoustique incidente. En déduire la taille optimale des particules afin d'éviter le problème de diffraction ultrasonore.

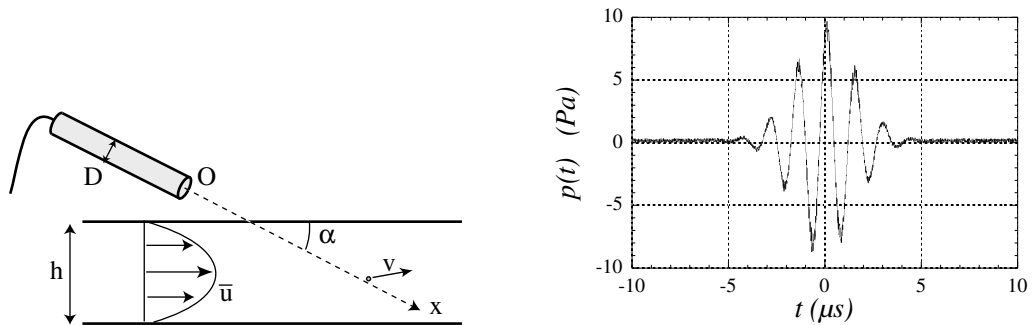


FIG. 4 – Dispositif de mesure de profil de vitesse à l’aide d’un vélocimètre Doppler ultrasonore, et impulsion acoustique émise par le transducteur.

2. Une impulsion d’environ 5 longueurs d’onde est émise au temps  $t = 0$  (figure 4). Calculer le temps de réception  $t_r$  de l’écho. Montrer que la fréquence reçue sera  $f_s = f_0 + \Delta f_D$ , où la fréquence Doppler est donnée par

$$\Delta f_D = \frac{v_x}{2\lambda_0}.$$

( $v_x = \vec{v} \cdot \vec{e}_x$  est la projection de la vitesse selon  $Ox$ ). Calculer l’ordre de grandeur de  $\Delta f_D$ .

3. A quelle technique a-t-on recours en LDV afin de mesurer  $\Delta f_D$ ? Est-ce nécessaire ici? Quelle méthode proposez-vous?
4. En mesurant les échos successifs, montrer qu’une même impulsion ultrasonore permet de reconstruire tout le profil de vitesse  $v_x$  le long de l’axe  $x$ . Quelle résolution temporelle maximale peut-on atteindre si l’on souhaite mesurer le profil de vitesse selon toute la hauteur du canal?
5. La vélocimétrie Doppler ultrasonore est très utilisée en médecine, afin de mesurer la vitesse du sang dans les vaisseaux. L’usage d’un LDV serait-il possible? (justifiez). Quelle technique, de l’anémométrie à fil chaud ou de l’UDV, vous semble la plus adaptée pour de telles mesures? (argumentez en quelques lignes).

### Exercice 3 : Anémométrie et thermométrie dans l’hélium à basse température

Afin d’étudier la turbulence à très haut nombre de Reynolds, on réalise un écoulement d’hélium gazeux à très basse température. La viscosité cinématique de l’hélium gazeux à  $T_0 = 6$  K est près de 200 fois inférieure à celle de l’air à  $20^\circ\text{C}$ , permettant ainsi d’accéder, dans une expérience de quelques dizaines de cm seulement, à des nombres de Reynolds de l’ordre de ceux rencontrés en aéronautique.

Les mesures de vitesse sont effectuées au moyen d’un anémomètre à fil chaud fonctionnant à température constante (“chaud” est ici relatif : quelques degrés K...). Le fil résistif est en carbone, de diamètre  $d = 7 \mu\text{m}$  et de longueur  $\ell = 40 \mu\text{m}$ . La vitesse moyenne de l’écoulement est  $\bar{u} = 30$  cm/s. On rappelle le bilan de puissance du fil chaud :

$$R_w I_w^2 = \pi \ell k_f \Delta T \text{Nu},$$

avec  $R_w$  la résistance du fil,  $I_w$  le courant circulant dans le fil,  $k_f$  la conductivité thermique du fluide,  $\Delta T = T_w - T_0$  (les valeurs numériques sont données dans le tableau 1). Le courant imposé est choisi tel que  $T_w = 2T_0$ . La loi de transfert de chaleur est donnée par le nombre de Nusselt :

$$\text{Nu} = 0,7 + 1,2\sqrt{Re_w}.$$

1. Calculer le nombre de Reynolds  $Re_w$  basé sur le diamètre du fil. Quelle est la nature de l’écoulement au voisinage du fil?
2. Calculer la puissance moyenne dissipée par le fil chaud, et en déduire le courant électrique  $I_w$ .

3. On rappelle que la longueur de refroidissement,

$$l_c \simeq d \sqrt{\frac{k_w}{2k_f \text{Nu}}}$$

est la distance caractéristique sur laquelle la température passe de  $T_0$  (aux extrémités du fil) à la température maximale (au centre du fil). Tracer l'allure du profil de température le long du fil.

4. Rappeler l'allure du profil de température dans le cas d'un anémomètre à fil chaud conventionnel pour lequel  $\ell/d \simeq 200$  (fonctionnant dans l'air à température ambiante). Justifiez pourquoi il est possible de choisir  $\ell/d \simeq 5$  dans le cas du fil chaud considéré ici dans l'hélium à basse température.
5. Un anémomètre conventionnel à  $\ell/d \simeq 200$  est sensible aux composantes de la vitesse normales à l'axe du fil. Pourquoi? Qu'en est-il de l'anémomètre considéré ici? Montrer que, dans tous les cas, seule la composante alignée selon  $\bar{u}$  est mesurable à taux de fluctuation suffisamment faible.

Dans le cadre de l'étude de la convection thermique turbulente, une quantité cruciale est le flux de chaleur  $\phi = \overline{u'T'}$  (les primes désignent les fluctuations), analogue du tenseur de Reynolds pour la température. Afin de mesurer cette quantité, il est nécessaire de disposer d'une mesure locale instantanée des fluctuations  $u'$  et  $T'$ , puis de calculer leur corrélation. Pour cela, il est possible d'utiliser l'anémomètre à fil chaud comme un simple thermomètre: En l'absence de chauffage, la température du fil  $T_w$  est égale à la température locale instantanée du fluide environnant  $T_0$ , et il suffit alors de mesurer la résistance  $R_w(T_w)$  du fil afin d'en déduire cette température. La loi de variation de la résistance avec la température est donnée par :

$$R_w(T_w) = R_0(1 + \alpha(T_w - T_0)),$$

avec  $R_0 = 150 \Omega$ ,  $T_0 = 6 \text{ K}$  et  $\alpha = 0,04 \text{ K}^{-1}$ . Pour mesurer cette résistance, on fait circuler un courant  $I_w$  constant et on mesure la tension  $E = R_w I_w$ . La surchauffe  $\Delta T$  engendrée par ce courant de mesure doit évidemment être faible devant les fluctuations  $T'$  que l'on souhaite mesurer. Cette technique porte le nom de *thermométrie à fil froid*.

6. Calculer le courant maximum utilisable si l'on souhaite mesurer des fluctuations  $T' \simeq 0.5 \text{ K}$  avec une précision de 1 mK. En déduire l'ordre de grandeur de la tension moyenne et des fluctuations de tension à mesurer. Quel dispositif suggérez-vous pour cette mesure?
7. Afin de disposer d'une mesure de  $u'$  et  $T'$  quasi-simultanée à partir du même fil, on conçoit une électronique d'asservissement basculant entre le fonctionnement en anémomètre à fil chaud ( $I_w$  élevé) et thermomètre à fil froid ( $I_w$  faible). Estimer la fréquence optimale  $f_b$  de basculement de l'un à l'autre. Que pensez-vous de l'effet d'inertie thermique du fil?
8. La figure 5 représente une portion de signaux de température et de vitesse. Estimer le taux de fluctuation du signal de vitesse, et indiquer le signe du flux de chaleur  $\phi$ .
9. Plutôt que d'effectuer les deux mesures à partir du même fil, une autre méthode pourrait consister à disposer deux fils côte à côte, le premier fonctionnant en fil chaud et le second en fil froid. Qu'en pensez-vous?

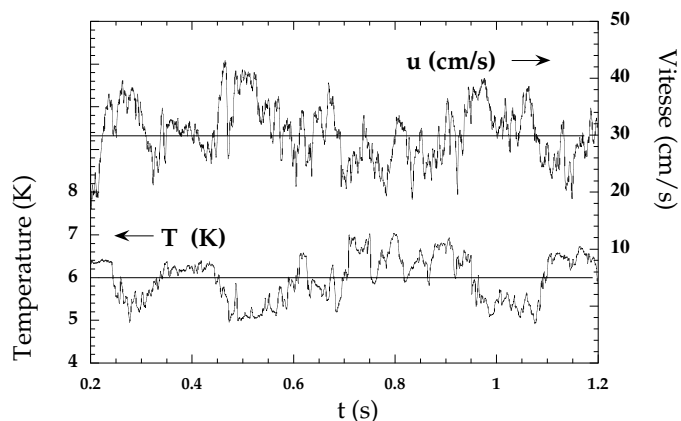


FIG. 5 – Exemple de signaux simultanés de température et de vitesse.

Fluide	Air (300 K, 1 atm)	Hélium gazeux (6 K, 1 atm)
Densité	$\rho = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$	$\rho = 9 \text{ kg.m}^{-3}$
Viscosité cinématique	$\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$	$\nu = 7,6 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$
Conductivité thermique	$k_f = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$	$k_f = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$
Anémomètre	Conventionnel (tungstène à 300 K)	Carbone à 6 K
Longueur	$\ell = 1 \text{ mm}$	$\ell = 40 \mu\text{m}$
Diamètre	$d = 5 \mu\text{m}$	$d = 7 \mu\text{m}$
Résistance moyenne	$R_w \simeq R_0 = 100 \Omega$	$R_w \simeq R_0 = 150 \Omega$
Sensibilité	$\alpha = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$	$\alpha = 4 \cdot 10^{-2} \text{ K}^{-1}$
Conductivité thermique	$k_w = 155 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$	$k_w = 0,3 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$

TAB. 1 – Propriétés physiques de l'hélium, comparées à celle de l'air, et caractéristiques du fil chaud de carbone à  $T = 6 \text{ K}$ , comparées à celle d'un fil chaud conventionnel à température ambiante.