Licence de mécanique, Paris XI **Année universitaire 2004/05**

Partiel de Mécanique

Jeudi 4 Novembre 2004

Durée : 3 heures - sans document

Les exercices sont indépendants.

Questions de cours

A- On considère une particule de masse m, dont on repère la position par les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ). Cette particule est soumise à une force centrale, dérivant d'un potentiel $V(r)$. On rappelle l'expression de la vitesse :

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi.$$

1. Calculer le moment cinétique $\vec{J}_O$ de cette particule par rapport à l'origine O. Ce vecteur est-il conservé ? Justifiez votre réponse.
2. Calculer le Lagrangien $\mathcal{L}$ pour cette particule. Ecrire les 3 équations de Lagrange pour chacune des coordonnées.
3. Comment peut-on qualifier la coordonnée ϕ dans ce Lagrangien ? De l'équation de Lagrange pour ϕ, déduire que la composante $J_z = \vec{J} \cdot \vec{e}_z$ du moment cinétique est conservée.
4. Question hors barème : peut-on tirer une conclusion similaire de l'équation de Lagrange pour la coordonnée θ ? La conservation des autres composantes du moment cinétique peut-elle se déduire de l'expression du Lagrangien ?

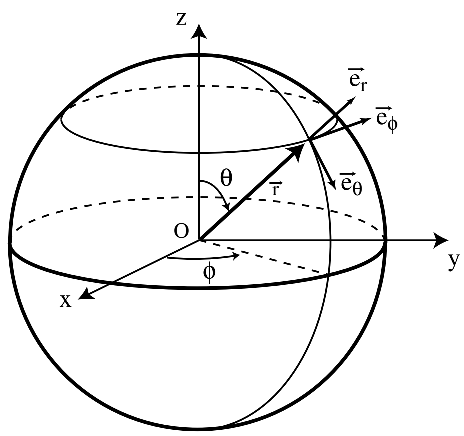

Fig. 1 – Définition de (r, θ, ϕ) en coordonnées sphériques.

B- Soient un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ centré en O et $\mathcal{R}'$ un référentiel en mouvement dans $\mathcal{R}$ et centré en O'. Soit une particule de masse m se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}$.

1. Faire un dessin illustrant cette situation.
2. Montrer que la vitesse s'écrit :

$$\vec{v} = \overrightarrow{v'} + \vec{v}_e = (d\overrightarrow{r'}/dt)_{\mathcal{R}'} + (d\overrightarrow{OO'}/dt)_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{r'},$$

où $\overrightarrow{r'} = \overrightarrow{O'M}$, $\overrightarrow{v'} = (d\overrightarrow{r'}/dt)_{\mathcal{R}'}$ est la vitesse de la particule dans $\mathcal{R}'$ (vitesse relative), $\vec{v}_e(t)$ est la vitesse d'entrainement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ et $\vec{\Omega}(t)$ est le vecteur instantané de rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

3. En dérivant l'expression précédente, exprimer l'accélération absolue de la particule en fonction de l'accélération relative, de l'accélération d'entrainement et de l'accélération de Coriolis.
4. Ecrire alors les équations du mouvement dans $\mathcal{R}'$. Identifier les forces d'inertie de Coriolis et d'entrainement.

Exercice : Oscillation d'une plaque

On considère une plaque d'épaisseur négligeable, de densité surfacique de masse (homogène) σ, et de masse totale M, en forme de quart de disque de rayon R. La plaque est suspendue à un point fixe en O, centre du disque (voir figure 2 a).

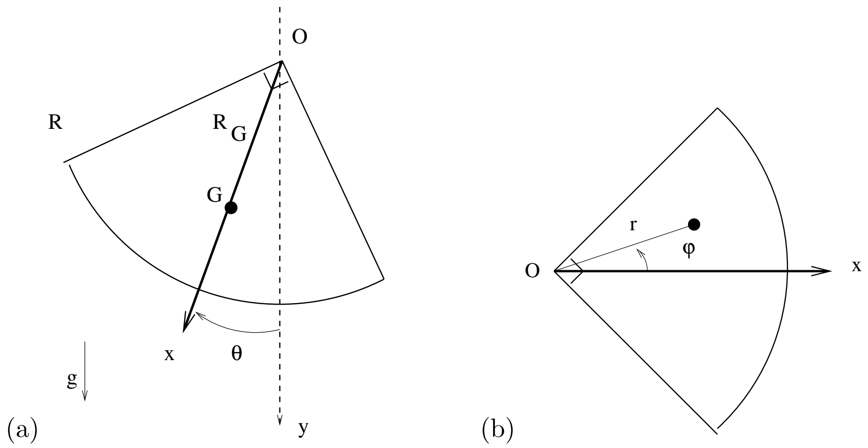

FIG. 2 – (a) Mouvement plan de la plaque de rayon R. (b) Calcul de la position du centre de masse.

On se propose d'étudier les oscillations de la plaque dans un plan vertical.

I
1. Quel est le nombre de degrés de liberté du système ?
2. Calculer le moment d'inertie I de la plaque par rapport à l'axe horizontal passant par O et orthogonal à la plaque. Exprimer I en fonction de M et de R.
3. On note Ox l'axe de symétrie de la plaque. En travaillant en coordonnées polaires $\{r, \varphi\}$ (voir figure 2 b), montrer que la distance $R_G = OG = 4\sqrt{2}R/(3\pi)$, où G est le centre de masse de la plaque.

II On note θ l'angle entre Ox et la verticale (figure 2 a).

1. a) Ecrire une expression de l'énergie cinétique de la plaque en fonction de M, R et $\dot{\theta}$.

1. b) Ecrire une expression de l'énergie potentielle en fonction de M, R, g et θ.
N B : on choisira l'origine de l'énergie potentielle de telle sorte que $V(\theta = 0) = 0$.
En déduire l'expression d'un lagrangien.

2. Ecrire l'équation de Lagrange du système.
3. Faire l'approximation des mouvements de faible amplitude ($\theta \ll 1$) dans l'équation obtenue, et montrer que le système oscille avec une fréquence angulaire ω dont on donnera l'expression.

Exercice : Force de Coriolis sur un train

Le TGV effectue la liaison Marseille-Paris (latitude moyenne $\lambda \simeq 45^o$) à une vitesse $V = 260$ km/h. Pour une telle vitesse, on peut envisager que la force de Coriolis due à la rotation de la terre intervienne dans l'équilibre du train. Pour cela, on décide de pencher le plan des rails d'un angle α, et on cherche à déterminer la valeur idéale de α de sorte que la réaction des rails reste normale aux rails, dans le cas particulier de ce trajet parcouru à cette vitesse donnée.

On choisit le système d'axes (x, y, z) représenté en figure 3, avec (x, y) le plan localement tangent à la surface de la terre et z la verticale ascendante locale. La vitesse du train est selon l'axe $y > 0$, vers le Nord.

1. Faire un bilan des forces s'exerçant sur le train et les représenter sur une figure. Pour les pseudo-forces d'inertie, on négligera la force d'entrainement due à la rotation de la terre et on ne prendra en compte que la force de Coriolis.
2. A partir de la condition d'équilibre dans le plan (x, z), déduire l'angle α en fonction de g, Ω, λ et V. Pour la liaison inverse Paris-Marseille, peut-on employer les mêmes rails ?
3. Faire l'application numérique et discuter de la pertinence pour la SNCF de réaliser des travaux d'aménagement pour pencher les rails sur les 800 km de la ligne Marseille-Paris. Si l'on décide finalement de garder $\alpha = 0$, comment sera la réaction des rails dans le plan (x, z) ? Quel rail risque de s'user le plus vite ?

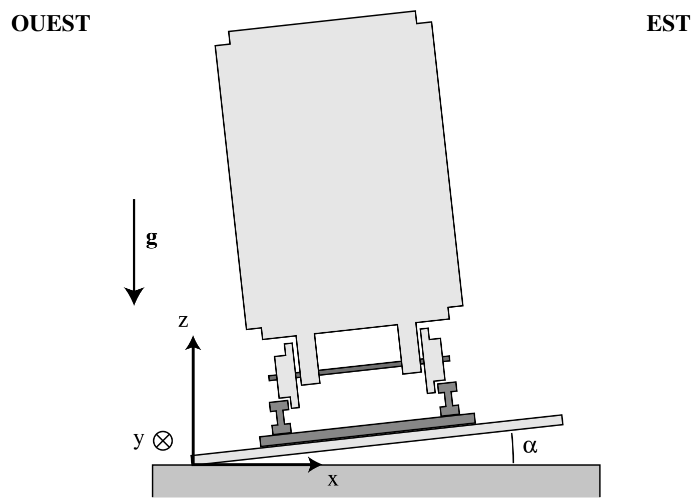

Fig. 3 – Schéma d'un train (vu de l'arrière) dont les rails ont été penchés afin de compenser l'effet de la force de Coriolis. L'angle α a été exagéré sur cette figure.