Licence de mécanique, Paris XI **Année universitaire 2003/04**

Examen partiel de Mécanique

Jeudi 6 Novembre 2003

Durée : 3 heures - sans document

Les exercices sont indépendants. Les questions marquées ** sont hors barème.

Exercice : Lagrangien de deux oscillateurs couplés

On considère un système décrit par le Lagrangien suivant :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(\omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2\right),$$

où ω_1 et ω_2 sont les pulsations propres de deux oscillateurs. Les coordonnées q_1, q_2 sont appelées les coordonnées normales du système.

1. Quelle est la dimension de ω_1 et de ω_2 ? On impose au système la contrainte $q_2 = \beta q_1$ où β est un nombre réel. La contrainte est-elle holonôme ou non ? Scléronôme ou non ? Rhéonôme ou non ?
2. Ecrire l'expression du nouveau Lagrangien $\mathcal{L}'$ prenant en compte cette contrainte, et écrire l'équation du mouvement du système contraint.
3. Exprimer la valeur de la pulsation propre ω' du système contraint en fonction de $\omega_1,\ \omega_2$ et β. En supposant $\omega_1 < \omega_2$, montrer que
$$\omega_1 < \omega' < \omega_2.$$

Problème 1 : Un manège

Un homme de masse $m = 80$ kg se trouve sur un manège en rotation avec un vecteur vitesse angulaire constant $\vec{\Omega}$. La paroi en rotation avec le manège fait un angle θ avec la verticale (voir figure 1). Le diamètre D où se trouvent les pieds de l'homme est suffisamment grand pour que l'on puisse négliger les dimensions de l'homme par rapport à celles du manège. Soient $D = 20$ m, $\theta = 10^o$. On suppose de plus que le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ est galiléen.

1. Indiquer graphiquement les forces et pseudo-forces, dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au manège, qui s'appliquent à l'homme lorsque celui-ci se tient immobile debout perpendiculairement à la paroi du manège. Préciser leurs expressions.
2. Ecrire le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel $\mathcal{R}'$. En déduire l'expression et la valeur numérique de la vitesse de rotation Ω_0 du manège pour que l'homme puisse rester dans cette position sans effort même dans le cas où la paroi serait glissante.
3. Quel est alors son poids apparent ? Faire l'application numérique.
4. A quelle vitesse l'homme devrait-il courir pour se maintenir sur la paroi inclinée dans le cas où le manège serait arrêté ? Est-ce bien raisonnable ?

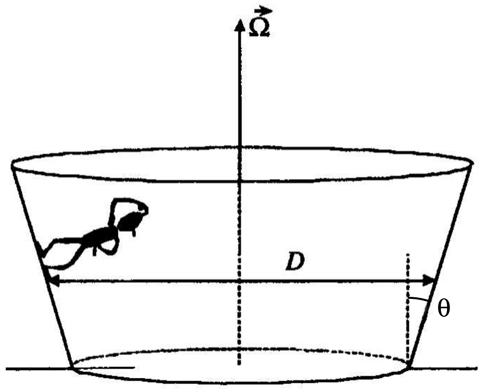

Figure 1: Homme sur un manège en rotation constante $\vec{\Omega}$.

5. Alors que le manège tourne avec la vitesse angulaire Ω_0, l'homme sort une piècette de sa poche et la laisse tomber par mégarde. Dire comment apparaît le mouvement de la piècette pour un observateur situé à l'extérieur du manège, immobile par rapport à la terre (les frottements de l'air sont négligés).

6. ** Décrire qualitativement le mouvement de la pièccette tel que le voit l'homme. Indiquer clairement sur un schéma les forces et pseudo-forces qui s'exercent sur la pièccette pendant sa chute.

Problème 2 : La balançoire

On souhaite comprendre le mécanisme de prise de vitesse lorsque l'on se balance sur une balançoire, sans aide extérieure. Parmi les techniques mises en œuvre, l'une consiste à abaisser ou surelever son centre de masse à différentes moments de la période d'oscillation, en baissant ou montant les jambes et le buste.

On considère le problème de la balançoire simplifié, représenté sur la figure 2. Le système est constitué d'une masse ponctuelle m, suspendue en O à un fil inextensible sans masse. Une petite poulie placée en O permet à un expérimentateur extérieur de faire varier la longueur L de la partie libre du fil.

Pour simplifier, on se placera toujours dans l'approximation des petits angles ($\theta \ll 1$). Les angles sont comptés par rapport à la verticale, positivement dans le sens trigonométrique.

1. Dans la phase AB, l'énergie mécanique est-elle conservée ? En déduire la vitesse v_B de la masse au moment où elle atteint le point B en fonction de g, L_1 et θ_A, sachant qu'elle est lâchée en A d'un angle θ_A sans vitesse initiale. Exprimer le moment cinétique de la masse par rapport à O au point B.

2. Au moment précis où la masse passe à la verticale du point d'attache O, la longueur du fil est brusquement diminuée de L_1 à L_2 (phase BC). Le moment cinétique est-il conservé lors de cette opération ? En déduire la valeur de la vitesse v_C au moment où la masse quitte le point C (au début de la phase CD) en fonction de g, L_1, L_2 et θ_A.

3. L'énergie mécanique est-elle conservée dans la phase CD ? Calculer l'angle maximal θ_D atteint par la masse au point D, en fonction de θ_A et de L_1/L_2.

4. Montrer que le gain d'énergie mécanique $\Delta E_{BC} = E_C - E_B$ dans la phase de montée BC peut s'écrire sous la forme

$$\Delta E_{BC} = mg\,\Delta L \left(1 + \frac{1}{2}\theta_A^2 \frac{L_1}{L_2}\left(1 + \frac{L_1}{L_2}\right)\right),$$

où $\Delta L = L_1 - L_2$ est la longueur de corde tirée par l'expérimentateur. En déduire la force $T = |\vec{T}|$ exercée pour effectuer cette opération (T est supposée constante pendant BC). D'où vient cette énergie supplémentaire dans le cas d'une personne sur une balançoire réelle ?

5. Au moment précis où la masse atteint son angle maximum, à la position D, l'expérimentateur relâche le fil à sa longueur initiale L_1. Quelle est la nature de la trajectoire dans la phase DE ? Montrer que, dans la limite $\Delta L \ll L_1$, le temps passé dans la phase DE est très inférieur à la période d'oscillation.

6. Une fois en E, on laisse la masse revenir vers sa position initiale, en A' (proche de A). Représenter graphiquement la position A'. Calculer l'angle $\theta_{A'}$ en fonction de θ_D et de L_1/L_2, puis de θ_A et de L_1/L_2 (toujours dans l'approximation des petits angles). Quel rapport de longueur de fil L_1/L_2 faut-il pour obtenir une augmentation d'angle $\theta_{A'}/\theta_A$ de 10 % ?

7. ** Combien de périodes d'oscillation faut-il réaliser pour obtenir un angle final double de l'angle initial ?

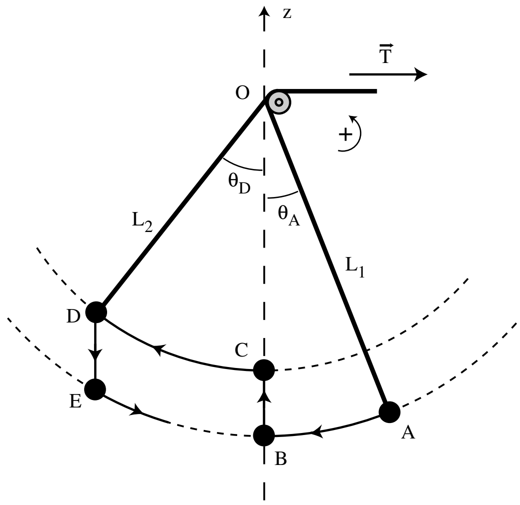

Figure 2: Technique de prise d'élan à la balançoire. Sur la photo, la jeune fille en phase CD s'efforce d'élever son centre de masse.