Licence de mécanique, Paris XI **Année universitaire 2001/02**

Examen partiel de Mécanique

Mercredi 7 Novembre 2001

Durée : 3 heures – sans document

I - Problème de mécanique newtonienne

On considère une sphère homogène et indéformable de masse m et de rayon R ; son poids $\vec{P}$ a pour intensité $P = mg$. Elle roule sans glisser sur une tôle ondulée de forme sinusoidale. (On suppose que la sphère reste en contact avec la tôle sauf pour certaines parties des questions 3 et 4.)

On note $\vec{R}$ la force exercée par la tôle sur la sphère ; on a $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ si on décompose $\vec{R}$ en une composante normale et une tangentielle à la tôle. Dans tout le problème, le mouvement s'effectue dans le plan (xOz), avec l'axe vertical orienté positivement vers le haut, le poids étant vers le bas, comme sur la figure.

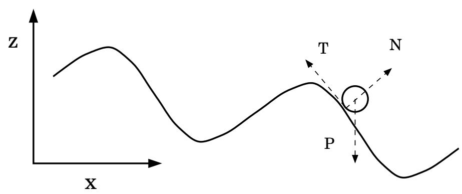


Figure 1: Sphère roulant sur une tôle ondulée.

Quand la tôle n'est pas inclinée par rapport à l'horizontale, son équation est $z(x) = A\sin(2\pi x/\lambda)$ où A est l'amplitude de la sinusoide et λ sa période. Mais on peut aussi incliner le tout en effectuant une rotation d'un angle α autour d'un point. Il est possible d'obtenir l'equation de cette courbe inclinée ; pour A et α petits, cette équation se simplifie ; dans tout le problème, on supposera que la tôle ondulée correspond à la courbe

$$z(x) = A\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) + \alpha x.$$

1ère partie : Cas R négligeable

On commence par négliger R (limite d'un corps ponctuel) ainsi que le frottement $\vec{T}$. A chaque temps t, la position du corps est spécifiée par $x(t)$ et par le fait qu'il repose sur la tôle.

1) Déterminer l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V du corps en fonction de $x(t)$ et dx/dt. (On prendra $V = 0$ en $x = z = 0$.) Dans le cas $\alpha = 0$, donner les points d'équilibre stables et instables.

2) On suppose $\alpha = 0$ dans cette question. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique E et une méthode graphique, décrire qualitativement les deux types de mouvement possibles en fonction de E. Donner la valeur "spéciale" de E qui délimite ces types de mouvements. Exprimer la période des petites oscillations (dans l'approximation habituelle qu'on spécifiera). Comment se comporte la véritable période quand l'amplitude en x de ces oscillations augmente? Quelle est l'amplitude maximale Δx des oscillations ainsi que la période du mouvement associé?

3) On suppose encore $\alpha = 0$ dans cette question. Si la particule a une grande vitesse, elle peut décoller de la tôle. Projeter les équations du mouvement suivant la normale à la tôle, et en déduire la condition pour que $\vec{N}$ s'annule quand il y a encore contact (cette condition dépend de x et de dx/dt). En déduire l'énergie E maximale que le corps peut avoir s'il ne décolle jamais de la tôle.

4) On considère maintenant $\alpha > 0$ mais petit. Décrire *qualitativement* comment sont modifiées les réponses aux questions du 2 (on ne donnera pas d'équations ni d'expressions mathématiques). L'amplitude maximale Δx des oscillations dépend de α ; que se passe-t-il quand α augmente suffisamment? Donner la valeur seuil α_0 de α où on a un changement dans les types de mouvements possibles. Décrire qualitativement les différentes phases au cours du temps d'une trajectoire quand $\alpha > \alpha_0$ et que le corps part de $x = 0$ avec une vitesse initiale nulle.

2ème partie : Roulement de la sphère

Dans cette seconde partie, on revient à la situation physique où R n'est pas négligeable et $\vec{T} \neq \vec{0}$. On suppose par ailleurs que l'amplitude A est petite devant R et λ. On suppose que la sphère roule sans glisser et que le vecteur instantané de rotation est suivant Oy et donc perpendiculaire à la figure. L'angle α est arbitraire.

5) Définir le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe Δ. Montrer que le moment d'inertie I_Δ de la sphère par rapport à un axe passant par son centre de masse est $2mR^2/5$. En utilisant la décomposition de l'énergie cinétique en un terme de translation et un terme de rotation, donner l'expression pour l'énergie cinétique du corps en fonction de sa vitesse instantanée de rotation ω et de la vitesse de son centre de masse $\vec{V}_G$.

6) On dénote par θ l'angle de rotation de la bille par rapport à un angle de référence fixé, et alors $\omega = d\theta/dt$. Donner une relation entre les différentielles $d\theta$ et dx qui suit de la condition de roulement sans glissement. En déduire l'expression de l'énergie cinétique et potentielle de la sphère (roulant sans glisser) en fonction de x et de dx/dt. Montrer que l'énergie mécanique E est conservée bien que $\vec{T} \neq \vec{0}$. (La limite A petit – mais non nul – permet de simplifier ce calcul).

7) Utiliser la conservation de l'énergie mécanique pour obtenir l'équation du mouvement, c'est-à-dire l'expression de d^2x/dt^2.

8) On se place maintenant dans le cas $\alpha = 0$. Trouver la période des petites oscillations en passant par la conservation de l'énergie. Comparer au cas $R = 0$. Commentaires?

II - Question de cours: non-unicité du lagrangien

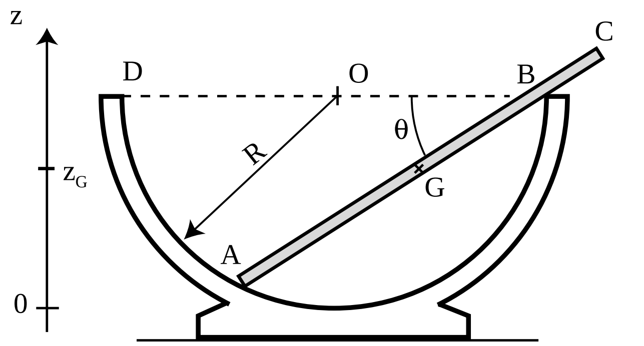
En cours, on a vu qu'en partant des équations de Newton la quantité $L \equiv T - V$ (énergie cinétique moins énergie potentielle) satisfait les équations de Lagrange. Mais il existe toute une famille de fonctions qui ont cette propriété, et donc le Lagrangien n'est pas unique.

Montrer que si L_1 satisfait les équations de Lagrange, alors pour tout $F(q_1, q_2, ..., q_n, t)$, la fonction

$$L_2 = L_1 + \frac{dF(q_1, q_2, ..., q_n, t)}{dt}$$

les satisfait aussi.

(Il est possible de montrer l'inverse, c'est-à-dire que la différence de deux fonctions satisfaisant les équations de Lagrange est nécessairement de la forme $dF(q_1, q_2, ..., q_n, t)/dt$, mais on ne considère pas cette réciproque ici.)



III - La baguette dans un bol

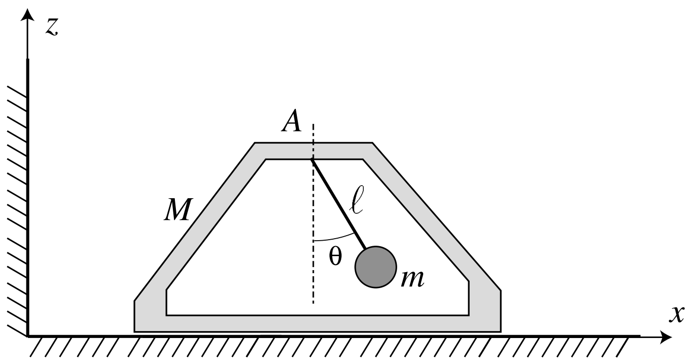
Une baguette homogène et filiforme, de masse m et de longueur $AC = 2R$, repose dans un bol hémisphérique parfaitement lisse de rayon R. La baguette glisse sans frotter dans le fond ainsi que sur le rebord du bol. On note θ l'angle que fait la baguette avec l'horizontale, A et B les points de contact de la baguette avec le bol, et G le centre de masse (au milieu de AC et d'altitude z_G) de la baguette. On considère que le mouvement se fait dans le plan de la figure seulement.

1) Indiquez les forces appliquées et les forces de contrainte exercées sur la baguette, et représentez-les graphiquement. Le système est-il holonôme ?

2) On s'intéresse à l'équilibre statique de la baguette. Combien le système a-t-il de degrés de liberté ? Rappeler brièvement le principe des travaux virtuels. Exprimer le travail virtuel associé à un déplacement δz_G. Interpréter.

3) Exprimer la longueur AB en fonction de R (on rappelle que le triangle DAB est rectangle en A), puis en déduire une expression de z_G. En déduire enfin l'angle d'équilibre θ de la baguette (on aura à résoudre une équation du second degré en $\cos\theta$).

IV - Le balancier



On considère le système représenté sur la figure : un chariot, de masse M, glisse sans frotter sur un rail rectiligne suivant Ox dans le plan horizontal. Un balancier de masse m, suspendu au point A, oscille sans frottement dans le plan xOz. On assimile ce balancier à une masse ponctuelle suspendue à une tige de longueur ℓ et de masse négligeable.

1) Combien ce système a-t-il de degrés de liberté ? (on explicitera les équations de liaison et la nature des contraintes). Pouvez-vous deviner la fréquence propre d'oscillation du balancier dans l'approximation $M \gg m$?

2) On choisit les coordonnées généralisées x (position du chariot) et θ (angle que fait le balancier avec la verticale). Calculer la vitesse du balancier par rapport à un point de référence fixe, et écrire le Lagrangien du système.

3) Montrer que les équations du mouvement de ce système s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\ddot{x}}{\ell} + \frac{m}{m+M}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) = 0, \\ \ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{\ell}\cos\theta + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Calculer l'accélération $\ddot{x}_G$ du centre de masse G de ce système, et en déduire la nature de la trajectoire du point G. Que pensez-vous de la réaction du support ?

4) Montrer que, dans l'approximation des petites oscillations ($\theta \ll 1$), l'équation différentielle pour θ se ramène à

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0,$$

où l'on identifiera la pulsation ω en fonction de g, l, m et M. Comparer la limite $M \gg m$ avec la question (1) ; que pensez-vous de la limite $M \ll m$?

5) Dans l'approximation des petites oscillations, déterminer la trajectoire du système $\theta(t), x(t)$ si l'on lance le chariot avec une vitesse initiale $\dot{x}(0) = v_0$ en lâchant le balancier d'un angle $\theta(0) = \theta_0$ sans vitesse initiale (dans le référentiel du chariot). Dessiner l'allure de $\theta(t), x(t)$.