Licence de mécanique, Paris XI **Année universitaire 2000/01**

Examen partiel de Mécanique

Mercredi 8 Novembre 2000

Durée : 3 heures – sans document

Le ressort tournant

On considère une bille fixée à l'extrémité d'un ressort, pouvant glisser sans frottement à l'intérieur d'un tube. Ce tube est fixé à angle droit sur un axe vertical Δ, et nous allons nous intéresser à la rotation de ce système autour de l'axe. La bille, de masse m, peut être considérée comme ponctuelle. Le ressort, de masse négligeable, a une longueur à vide l_0 et un coefficient de raideur k.

Dans la première partie, le système sera mis en rotation autour de l'axe à vitesse angulaire constante fixée par l'extérieur, tandis que dans la seconde partie le système pourra tourner librement autour de l'axe. Enfin, quelques questions de cours concernant l'approche lagrangienne de ce problème feront l'objet de la troisième partie. Les deux premières parties peuvent être traitées indépendamment. La troisième partie peut être traitée indépendamment, mais il est toutefois préférable avant de l'aborder d'avoir bien compris la première partie.

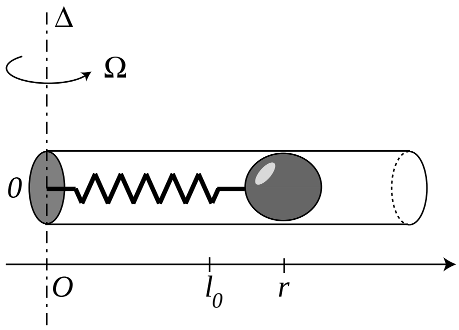

Figure 1: Ressort en rotation imposée par l'extérieur.

1ère partie : La rotation forcée

Le tube contenant la bille et le ressort est mis en rotation autour de l'axe Δ (figure 1), à une vitesse angulaire Ω=cste imposée par l'extérieur. On se place dans le référentiel $\mathcal{R}'$ tournant avec le tube. On note r l'abscisse de la masse le long de l'axe du tube ($r > 0$), l'origine étant choisie en O.

1) Le référentiel $\mathcal{R}'$ est-il galiléen ? Faire le bilan des forces et pseudo-forces d'inertie agissant sur la bille dans $\mathcal{R}'$.

2) Montrer que le principe fondamental de la dynamique dans ce référentiel, projeté selon l'axe du tube, peut s'écrire sous la forme

$$m\ddot{r} = -\frac{dE_p}{dr},$$

où E_p est une énergie potentielle effective dans le référentiel $\mathcal{R}'$, incluant l'effet des différentes forces et pseudo-forces en jeu. On montrera en particulier que la pseudo-force de Coriolis, $\vec{\psi}_c = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ (où $\vec{v}$ est la vitesse de la bille dans le référentiel $\mathcal{R}'$) n'intervient pas. On écrira cette énergie potentielle (à une constante près) sous la forme

$$E_p(r) = ar^2 - br,$$

où l'on déterminera a et b (avec $b > 0$). On exprimera a en fonction de la pulsation réduite $\epsilon = \Omega/\omega_0$, où $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ est la pulsation propre du ressort. Donner l'allure de $E_p(r)$ en fonction du signe de a.

3) Déterminer la position d'équilibre de la bille r_{eq} en fonction de l_0 et ϵ et discuter sa stabilité. Donner l'allure de la courbe $r_{eq} = f(\epsilon)$.

4) Montrer que la distance r vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{r} + (1 - \epsilon^2)r = l_0.$$

En distinguant les différents régimes en fonction de ϵ, décrire qualitativement les trajectoires de la bille.

5) Pour de faibles vitesses angulaires Ω, montrer que la bille oscille autour de sa position d'équilibre r_{eq} avec une pulsation ω que l'on déterminera. Donner l'allure de la courbe $\omega = f(\epsilon)$ dans ce régime, et discuter les limites $\epsilon \to 0$ et $\epsilon \to 1$.

6) Déterminer la loi $r(t)$ pour $\Omega = \omega_0$ et $\Omega > \omega_0$ lorsque la bille est lâchée à $r(0) = l_0$ sans vitesse initiale dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Montrer que, dans le cas $\Omega \gg \omega_0$ et pour une longueur de tube de quelques fois l_0, la bille est éjectée au bout d'un temps $\tau \simeq 1/\Omega$, c'est-à-dire en un tour environ.

7) La figure 2 représente différentes trajectoires de la bille dans le référentiel du laboratoire. Discuter dans quel régime chacune de ces figures (a), (b) et (c) a été obtenue. Dans les cas présentant une oscillation, déterminer la valeur du paramètre ϵ.

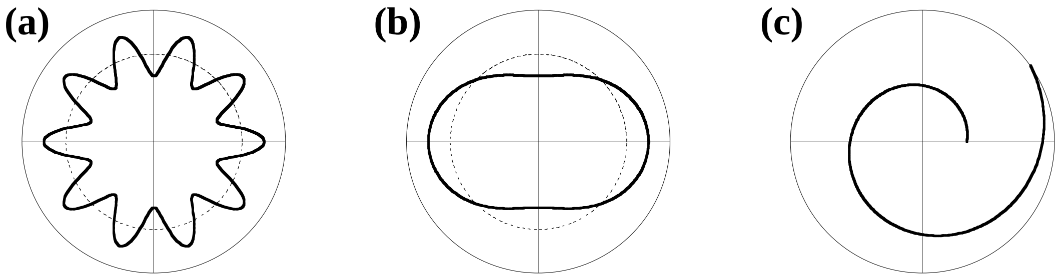

Figure 2: Différentes trajectoires de la bille dans le référentiel du laboratoire, vues dans le plan normal à l'axe Δ. Le cercle pointillé représente la distance d'équilibre r_{eq}, lorsqu'elle existe.

2ème partie : La rotation libre

Dans cette seconde partie, on considère maintenant l'ensemble $\{$bille + ressort$\}$ comme tournant librement autour de l'axe Δ. On se place cette fois-ci dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, considéré comme galiléen. La figure 3 représente le système vu de dessus. La bille est repérée par sa distance r au point O et par l'angle θ qu'elle fait avec une direction fixe arbitraire. On négligera le poids de la bille (colinéaire à Δ).

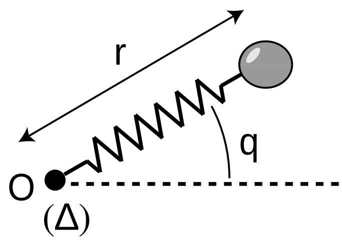

Figure 3: Ressort en rotation libre, vu dans le plan normal à l'axe Δ.

8) Calculer le moment cinétique de la bille par rapport à O, ainsi que le moment des forces s'exerçant sur elle. Montrer que le moment cinétique peut s'écrire sous la forme $\vec{L} = L_0 \vec{e_z}$, où $\vec{e_z}$ est le vecteur unitaire dirigé selon l'axe Δ et où L_0 est conservé au cours du temps. Qu'en déduire concernant la trajectoire de la bille ?

9) Expliquer qualitativement en quoi la conservation du moment cinétique va modifier les trajectoires par rapport aux trajectoires bornées obtenues dans le dispositif à rotation forcée (cf. Fig. 2a et b).

10) Montrer que l'énergie mécanique est conservée au cours du temps. Exprimer l'énergie mécanique de ce système, et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$E_0 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \tilde{E}_p(r),$$

où l'énergie potentielle effective s'écrit

$$\tilde{E}_p(r) = \frac{L_0^2}{2mr^2} + \frac{1}{2} k (r - l_0)^2. \tag{1}$$

Donner l'allure de $\tilde{E}_p(r)$. Indiquer graphiquement la distance d'équilibre r_{eq} (correspondant à une trajectoire circulaire), et discuter sa stabilité.

11) On va chercher à déterminer la trajectoire de la bille lorsqu'elle est envoyée d'une distance initiale r_i ($\theta_i = 0$) avec une vitesse initiale v_i perpendiculaire à l'axe du ressort, dans le plan normal à Δ. Calculer le moment cinétique L_0 et l'énergie mécanique E_0 de la bille en fonction des conditions initiales r_i et v_i et des paramètres du problème.

12) Montrer que l'équation du mouvement peut s'écrire

$$\ddot{r} = \frac{L_0^2}{m^2 r^3} - \omega_0^2 (r - l_0), \tag{2}$$

où $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ est la pulsation propre du ressort. Cette équation étant assez compliquée dans le cas général, on se propose d'en étudier le comportement dans deux cas limites (les questions 13 et 14 sont indépendantes).

13) **Approximation** $r(t) \gg l_0$

On supposera dans cette question que les conditions initiales sont telles que $r(t) \gg l_0$ à tout instant t. On pourra donc poser $l_0 = 0$.

a) A partir du principe fondamental de la dynamique, montrer que chaque composante (x, y) du vecteur position $\vec{r}(t)$ constitue un oscillateur harmonique indépendant. En déduire que la trajectoire est une ellipse de centre O. Calculer ses demi-axes a et b en fonction de ω_0 et des conditions initiales (r_i, v_i), et en donner l'allure.

b) Exprimer l'énergie potentielle effective (1) et l'énergie totale E_0 en fonction uniquement de k, a, b et r. Tracer $\tilde{E}_p(r)$ et E_0 et déterminer graphiquement le domaine de distance r accessible à la bille. Que vaut la vitesse radiale $\dot{r}$ aux frontières de ce domaine ? En déduire que ces points constituent les demi-axes a et b de l'ellipse. Vérifier que le minimum de $\tilde{E}_p(r)$ satisfait $r_{eq} = \sqrt{ab}$.

14) **Approximation des petites oscillations**

On reprend l'équation générale du mouvement (2), sans faire l'approximation précédente. On choisit comme condition initiale $r_i = l_0$, et $v_i \ll \omega_0 l_0$ toujours normal à l'axe du ressort. On se place dans l'approximation des faibles oscillations, et on pose $r = r_{eq}(1 + \eta)$, où $\eta \ll 1$.

a) Donner l'équation vérifiée par la distance d'équilibre r_{eq} (déterminée graphiquement en question 10). On ne cherchera pas à calculer explicitement r_{eq}.

b) Montrer par un développement limité au 1er ordre que η vérifie

$$\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0,$$

où $\omega = \omega_0 \sqrt{4 - 3l_0/r_{eq}}$. (Utiliser l'équation établie en a).

c) En intégrant cette équation, montrer que la distance $r(t)$ vérifie au premier ordre

$$r(t) = r_{eq}(1 - \alpha \cos(\omega t)),$$

où l'on identifiera l'amplitude réduite $\alpha > 0$ en fonction de r_{eq} et l_0. Montrer que la conservation du moment cinétique permet d'en déduire, au premier ordre, la vitesse angulaire :

$$\dot{\theta}(t) = \omega_0 \sqrt{\alpha}(1 + 2\alpha \cos(\omega t)).$$

d) Dessiner l'allure des trajectoires dans cette approximation des petites oscillations. Quelle est la condition à satisfaire pour avoir un mouvement périodique ? (On pourra calculer la variation de θ sur un intervalle de temps nT, où n est un entier et T la période de l'oscillation radiale $r(t)$).

15) La figure 4 représente différentes trajectoires de la bille dans le plan normal à l'axe Δ, à r_i fixé et v_i croissante. Commentez ces tracés. Dire en particulier auxquels peuvent s'appliquer les approximations effectuées précédemment (questions 13 et 14).

16) Est-il possible d'envoyer la bille à l'infini dans le dispositif à rotation libre ? Et dans le dispositif à rotation forcée ? Dans ce second cas, qui fournit l'énergie nécessaire ?

3ème partie : Approche lagrangienne

On reprend la première partie du problème, dans laquelle la bille a une vitesse angulaire imposée de l'extérieur.

17) **Les contraintes du système**

a) Spécifier les contraintes ainsi que leur type (en utilisant la classification des différents types donnée en cours).

b) Quel est le nombre de degrés de libertés de ce système ? Quelles coordonnées généralisées choisir ?

c) Les forces de contrainte travaillent-elles ?

18) **Equations de Lagrange**

a) Donner le lagrangien en fonction des q_i, $\dot{q}_i$, et t.

b) Dans le cours sur les forces centrales, nous avons vu comment dériver la conservation du moment cinétique à partir du lagrangien. Que pensez-vous de ce calcul dans le cas du ressort en rotation forcée ?