

Examen de Mécanique

Mardi 7 septembre 2004

Durée : 3 heures – sans document

Exercice 1 : Forces centrales

On considère le problème de Képler: un corps ponctuel de masse m est soumis à une force centrale en $1/r^2$. On sait que le mouvement est plan; soit (r, θ) les coordonnées polaires du corps, la force étant attractive vers l'origine. On sait que les orbites sont des coniques; pour cet exercice, on ne considèrera que le cas d'orbites *elliptiques*.

Notations: \vec{e}_r est le vecteur unitaire radial, \vec{e}_θ le vecteur unitaire orthoradial, \vec{e}_z le vecteur unitaire tel que $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est orthonormé direct. $\vec{P} = m\vec{V}$ est la quantité de mouvement, \vec{J} le moment cinétique du corps par rapport à l'origine (c'est-à-dire le foyer attracteur de l'ellipse), et $U(r) = -k/r$ l'énergie potentielle (avec $k > 0$ une constante).

Questions de cours

- Dans le cas de la force attractive considérée ici, définir brièvement (10 lignes maximum) les trajectoires possibles (en plus de l'orbite elliptique) et préciser s'il s'agit d'état libre ou d'état lié. Donner l'expression de k en fonction de la constante de gravitation $\mathcal{G} = 6,672 \cdot 10^{-11}$ USI, de la masse du centre attracteur M et de la masse du corps m .
- Énoncer les trois lois de Képler dans le cas des trajectoires elliptiques. À laquelle se rapporte l'expression

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{(2\pi)^2}{\mathcal{G}M} ?$$

Définir les quantités apparaissant dans cette formule.

- Application: des chercheurs ont récemment prouvé l'existence d'un trou noir au centre de notre Galaxie (Nature, 2002, Schodel *et al.*, astro-ph/0210426). Des mesures d'astrométrie de grande précision ont en effet suivi l'orbite d'une étoile S2, képlérienne et elliptique, de période 15,2 ans et de demi-grand axe $0,143 \cdot 10^{15}$ m. Déterminer alors la masse du trou noir attracteur.

On introduit le vecteur de Laplace-Runge-Lenz:

$$\vec{A} = \vec{P} \wedge \vec{J} - mk\vec{e}_r.$$

1. Montrer que \vec{J} est une constante du mouvement que l'on explicitera en fonction des variables du problème, et que $\vec{A} \cdot \vec{J} = 0$.
2. Calculer $d\vec{A}/dt$. En déduire que \vec{A} est une constante du mouvement.
3. Calculer $\vec{A} \cdot \vec{r}$ (où $\vec{r} = r\vec{e}_r$). N.B.: on posera $\vec{J} = \ell\vec{e}_z$; on pourra utiliser la symétrie de permutation circulaire du produit mixte de trois vecteurs.
4. Représenter par un schéma: l'origine du système de coordonnées polaires, l'orbite, les foyers et les axes portant les vecteurs \vec{A} et \vec{J} . Pour obtenir l'axe portant \vec{A} , on pourra considérer l'expression de ce vecteur quand r est à son minimum.

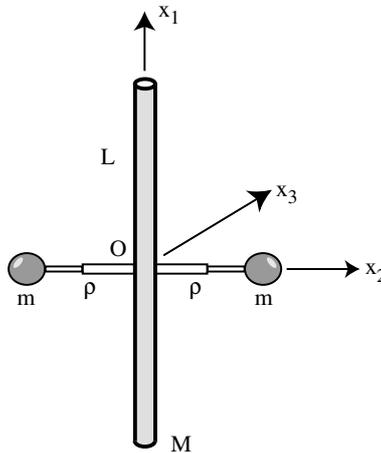
5. Prendre les coordonnées polaires pour lesquelles l'axe Ox est suivant \vec{A} ; l'angle θ est alors mesuré par rapport à cet axe. En partant de l'expression de $\vec{A} \cdot \vec{r}$, montrer que l'expression en coordonnées polaires de l'orbite peut s'écrire :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta}$$

où l'on exprimera le paramètre p et l'excentricité ϵ de l'orbite en fonction de $|\vec{A}|$, m , k et ℓ .

Exercice 2 : Le satellite tournant

On s'intéresse à la mise en rotation rapide d'un satellite dans l'espace. Cet objet volant est constitué de deux parties : un corps central entouré de deux masselottes. Le corps central est assimilable à une tige de longueur L , de masse M et d'épaisseur négligeable. Les deux masselottes (considérées comme *ponctuelles*) sont chacune de masse m , et sont maintenues à une distance ρ par deux supports de masse négligeable, fixés rigidement à mi-hauteur du corps central.



On note O le centre de masse de ce système, et (x_1, x_2, x_3) le repère lié au solide. x_1 est l'axe de symétrie du corps central, x_2 l'axe des masselottes et x_3 l'axe orthogonal au plan (x_1, x_2) . On rappelle les équations d'Euler dans le cas d'une rotation libre :

$$\begin{cases} I_1 \dot{\Omega}_1(t) - (I_2 - I_3) \Omega_2(t) \Omega_3(t) = 0 \\ I_2 \dot{\Omega}_2(t) - (I_3 - I_1) \Omega_3(t) \Omega_1(t) = 0 \\ I_3 \dot{\Omega}_3(t) - (I_1 - I_2) \Omega_1(t) \Omega_2(t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

où le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}(t) = \Omega_1(t)\vec{e}_1 + \Omega_2(t)\vec{e}_2 + \Omega_3(t)\vec{e}_3$ est exprimé dans le repère lié au solide.

- Calculer la matrice d'inertie \mathcal{I}_O du satellite par rapport à O dans le repère (x_1, x_2, x_3) . Montrer que l'écartement ρ des masselottes permet de distinguer deux configurations selon l'ordre des moments d'inertie principaux :

$$\begin{aligned} A : & \quad I_1 < I_2 < I_3 \quad \text{pour } \rho < \rho_c \\ B : & \quad I_2 < I_1 < I_3 \quad \text{pour } \rho > \rho_c \end{aligned}$$

où ρ_c est un écartement seuil que l'on déterminera en fonction de L , m et M . Dans la suite, on exprimera les moments d'inertie en fonction de m , ρ et ρ_c .

2. On s'intéresse à la stabilité de la rotation autour de l'axe x_1 , dans chacune des configurations A et B. Pour cela on considère le vecteur instantané de rotation sous la forme

$$\vec{\Omega} = \Omega_0 \vec{e}_1 + \vec{\omega}(t),$$

telle que la perturbation $\vec{\omega}(t) = \omega_1(t)\vec{e}_1 + \omega_2(t)\vec{e}_2 + \omega_3(t)\vec{e}_3$ soit d'amplitude très petite devant la constante Ω_0 .

- a) Montrer que, au premier ordre en ω , les équations d'Euler conduisent à $\omega_1 = \text{cste}$, et que les composantes selon x_2 et x_3 de la perturbation satisfont les équations différentielles :

$$\begin{cases} \ddot{\omega}_2 + K\omega_2 = 0 \\ \ddot{\omega}_3 + K\omega_3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

où K est une constante que l'on exprimera en fonction de Ω_0 , ρ et ρ_c .

- b) Intégrer ces équations différentielles en distinguant les configurations A et B, et décrire la trajectoire du vecteur instantané de rotation dans le repère du solide. Préciser la vitesse angulaire de précession Ω_p dans le cas de la trajectoire stable. Quelle situation reconnaît-on pour $\rho \ll \rho_c$?
- c) Que pensez-vous de la stabilité de la rotation si l'objet présentait 4 masselottes plutôt que 2, disposées symétriquement selon x_2 et x_3 ?

Exercice 3 : Le "paradoxe" de la cheminée tombante

Lors de la phase finale de la chute d'une tige pivotant autour d'un point fixe, on constate que l'extrémité libre de la tige tombe avec une accélération supérieure à l'accélération de la pesanteur. Ce phénomène est souvent appelé le "paradoxe de la cheminée tombante".

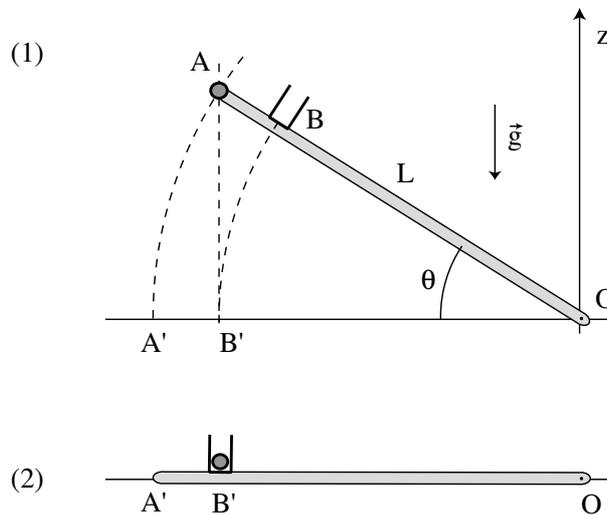


Figure 1: Schéma de la tige tombante dans son état initial (1) et final (2).

Pour mettre en évidence ce phénomène, on considère le modèle simplifié représenté sur la figure 1 : une fine tige homogène, de masse m et de longueur $OA = L$, pivote librement autour d'un point fixe O . On note θ l'angle entre la tige et l'horizontale. On la lâche sans vitesse initiale à partir d'un angle θ_0 et, au même instant, on lâche du point A une bille de masse m' (1). Pour un angle initial θ_0 pas trop élevé, la bille va venir tomber dans un réceptacle B fixé sur la tige à une distance judicieuse, $OB = OA \cos \theta_0$ (2). Si l'expérience marche, c'est que l'extrémité A de la tige touche le sol en A' avant que la bille n'atteigne le point B' : c'est le fameux paradoxe.

1. On considère le système composé de la tige uniquement. Calculer son énergie totale, et en déduire sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction de g , L , θ et θ_0 , ainsi que son accélération angulaire $\ddot{\theta}$ en fonction de g , L et θ .
2. Calculer l'accélération $|\vec{a}|$ de l'extrémité A de la tige en fonction de g , θ et θ_0 . Calculer ce que vaut cette accélération pour $\theta = \theta_0$, c'est-à-dire au moment où on lâche la tige. Montrer que cette accélération initiale est supérieure à g pour θ_0 inférieur à une valeur limite, que l'on calculera.



Figure 2: Photo d'une cheminée en train de se casser lors de sa chute (Glasgow).

Question hors barème : La figure 2 représente une cheminée en train de chuter. Au cours de cette chute, elle se casse. Qu'en pensez-vous ?