Licence de mécanique, Paris XI **Année universitaire 2001/02**

Examen Mécanique

Mardi 4 Septembre 2001

Durée : 2 heures – sans document

Exercice 1 : Lois de conservation en mécanique lagrangienne

Soit $\mathcal{L}(\{q_k\}_{k=1\ldots3}, \{\dot{q}_k\}_{k=1\ldots3})$ le lagrangien d'une particule de masse m pour lequel toutes les forces dérivent d'un potentiel indépendant des vitesses. On suppose que $\mathcal{L}$ est indépendant de q_2.

1) Déterminer la quantité conservée suite à cette dernière propriété. Quelle est la dimension de cette quantité ? (On dénotera par $[q_2]$ la dimension de q_2.)

2) On suppose que les $\{q_k\}$ sont les coordonnées cartésiennes. Quelle est la quantité conservée ainsi que sa dimension si q_2 est la coordonnée y ?

3) On suppose que (q_1, q_2, q_3) sont les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z). Quelle est alors la quantité conservée ainsi que sa dimension ?

Exercice 2 : Forces centrales

Une molécule est composée de deux atomes, chacun de masse m ; leur énergie potentielle d'interaction est donnée par

$$U(r) = \frac{A}{r^6} - \frac{B}{r^4} \tag{1}$$

où r est la distance entre les 2 atomes supposés ponctuels et les constantes A et B sont positives. Il n'y a pas d'autres forces que celles associées à $U(r)$.

1) On prend un repère galiléen ayant pour origine le centre de masse G de la molécule. Montrer que le vecteur moment cinétique par rapport à G est une constante du mouvement. En déduire que le mouvement est plan.

   Dans le reste du problème, θ est l'angle d'orientation de la molécule dans ce plan, L la norme du moment cinétique par rapport à G et on posera $\mu = m/2$.

2) En utilisant μ, écrire le lagrangien $\mathcal{L}$ du système dont les coordonnées généralisées sont r et θ. (On rappelle que r est bien la distance entre les deux masses et non pas une distance à G.) En déduire les deux équations différentielles pour $(r(t), \theta(t))$. Exprimer L en fonction de μ et des coordonnées (r, θ) ou de leurs dérivées. Interprétation?

3) On s'intéresse à la variation de r dans le temps. Il est possible d'introduire un potentiel effectif U_{eff} qui intervient dans l'équation du mouvement en r seul. On est ainsi ramené à un problème standard purement uni-dimensionnelle d'une particule en présence de U_{eff}. Donner l'expression mathématique de $U_{eff}(r)$. Comment cette énergie potentielle dépend-elle du paramètre L ? Que trouve-t-on pour $L = 0$? Faire un graphique montrant à la fois U et U_{eff}. (Pour tracer U_{eff}, prendre la limite où L est petit.)

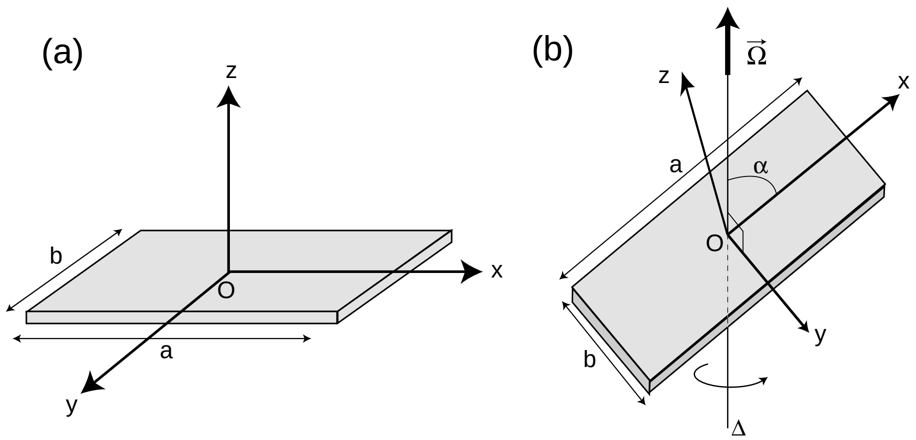
4) Pour L pas trop grand, le mouvement des deux particules peut être circulaire uniforme. Quelles sont dans ce cas les distances possibles r_c entre les 2 atomes ? (On trouvera l'expression pour r_c après avoir résolu une équation du deuxième degré.) Pour avoir un mouvement *stable*, laquelle de ces solutions faut-il choisir ? On justifiera la réponse et on montrera sur une figure de U_{eff} à quoi correspond ce choix.

5) Quelle est la valeur maximale L_{max} que peut prendre L avant que la molécule ne s'ionise (s'éclate) nécessairement ? Représenter U_{eff} quand $L = L_{max}$.

6) Pour $0 < L < L_{max}$, déterminer la valeur maximale que peut prendre r si la molécule effectue des vibrations.

Exercice 3 : Rotation d'une plaque

On souhaite étudier l'influence d'un défaut d'alignement dans la rotation d'une plaque plane. On considère la plaque rectangulaire homogène dans le plan (x, y) représentée sur la figure ci-dessous (a), de dimensions $a \times b$ et d'épaisseur selon z négligeable. On note m sa masse et $\rho = m/ab$ sa densité surfacique. Cette plaque est mise en rotation autour de l'axe Δ passant par son centre O et faisant un angle $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ avec l'axe Ox (voir figure b). Le système d'axes orthogonaux (x, y, z) reste lié à la plaque ; l'axe Δ est dans le plan (x, z), et s'obtient par la rotation de Ox d'un angle α autour de Oy.



1) Calculer le tenseur d'inertie $\mathcal{I}_O$ de cette plaque par rapport à O dans le système d'axes (x, y, z). S'agit-il de ses axes principaux ?

2) La plaque est en rotation autour de Δ à la vitesse angulaire constante Ω. Donner les composantes du vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$ dans le système (x, y, z).

   Exprimer dans ce même système les composantes du moment cinétique $\vec{L}$. En déduire le mouvement de $\vec{L}$ dans le repère fixe du laboratoire. (Donner une description géométrique de la "trajectoire" de ce vecteur dans le temps.)

3) Exprimer l'énergie cinétique T de rotation ; comment évolue-t-elle dans le temps ?

   Tracer l'allure de $T(\alpha)$ et commenter. Quelle valeur de α minimise cette énergie ?

4) Si l'axe Δ n'est pas infiniment rigide, la rotation s'accompagnera de vibrations ; pourquoi ? Quelle(s) valeur(s) de α permet(tent) *intuitivement* de minimiser ces vibrations ? Comment estimeriez-vous l'importance de ces vibrations ?