Licence de mécanique, Paris XI **Année universitaire 2004/05**

Examen de Mécanique

Jeudi 13 Janvier 2004

Durée : 3 heures - sans document

Exercice 1 : Cerceau roulant sans glisser sur un plan incliné

La figure 1 représente un cerceau de rayon R et de masse M roulant sans glisser sur une pente inclinée dans le plan $(O,\ x,\ z)$. On suppose que le mouvement reste plan. La rotation du cerceau est repérée par l'angle θ. L'angle de la pente est désigné par $\alpha = constante$ et g est l'intensité de la pesanteur.

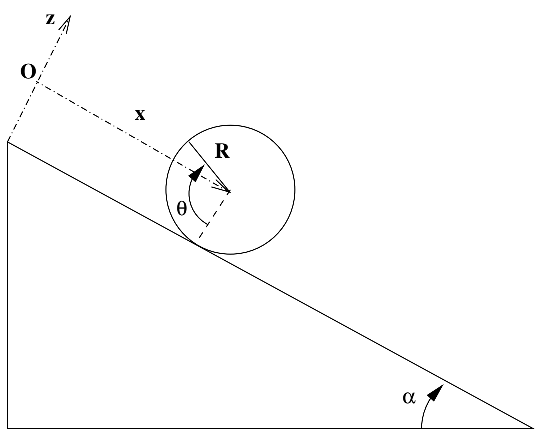

Figure 1: Cerceau roulant sans glisser sur un plan incliné.

a) Quel est le nombre de degrés de liberté du système si le cerceau roule sans glisser sur la pente ? Quelle est la nature des liaisons ?

b) Que peut-on dire de la force de contact $\vec{F}$ exercée par le support sur le cerceau ?

c) On va calculer $\vec{F}$ par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Rappeler le principe de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Quel potentiel V_λ prendre (au signe près) ?

d) Montrer alors que le lagrangien s'écrit (en appelant λ le multiplicateur de Lagrange lié à $\vec{F}$):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2\right) + Mgx\sin\alpha - \lambda(x - R\theta) \tag{1}$$

e) Déterminer les équations du mouvement du cerceau.

f) Ecrire alors l'équation du mouvement en x en supposant que le cerceau roule sans glisser sur la pente. La comparer à celle qu'on aurait obtenue pour un point de même masse M dans la même situation. Que vaut λ ?

g) En déduire les composantes en x et en θ de la force généralisée correspondant au multiplicateur de Lagrange λ. Cette force travaille-t-elle ? Interpréter physiquement λ.

Exercice 2 : Stabilité d'un régulateur de Watt

On considère un modèle simplifié de régulateur de Watt, représenté en figure 2. Ce dispositif mécanique est constitué de deux boules B_1 et B_2 (considérées comme ponctuelles), de masse m, reliées à un axe vertical par deux bras sans masse de longueur $L = OB_1 = OB_2$. Ces bras peuvent pivoter sans frottement sur l'axe au point O, et sont maintenus par deux bras secondaires A_1C et A_2C, dont la base C peut coulisser le long de l'axe vertical. On repère par θ l'angle de OB_1 avec la direction verticale. L'ensemble du système peut pivoter sans frottement autour de l'axe vertical z, et on repère par ϕ l'angle de rotation par rapport à une direction fixe arbitraire.

Le principe d'un tel régulateur est de stabiliser la vitesse de rotation $\dot{\phi}$. En effet, une petite perturbation de cette vitesse angulaire $\dot{\phi}$ doit conduire à un ajustement de la hauteur des boules, qui doit en retour atténuer la perturbation de vitesse angulaire. L'objectif de ce problème est de mettre en évidence ce mécanisme de régulation.

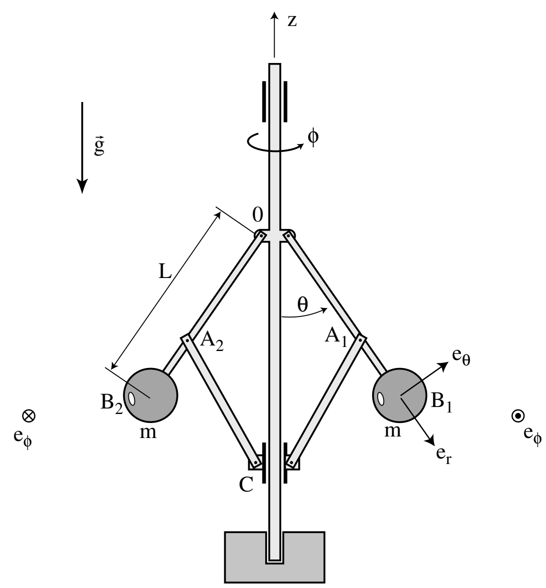

Figure 2: Modèle simplifié de régulateur de Watt.

1. On cherche dans un premier temps à déterminer l'angle d'équilibre θ_0 des boules pour une vitesse angulaire donnée $\dot{\phi} = \Omega_0$, supposée constante. Pour cela, on se place dans le référentiel non Galiléen $\mathcal{R}'$ lié au plan des boules.

   a) Faites un bilan des forces et pseudo-forces s'exerçéant sur les boules dans le référentiel $\mathcal{R}'$, et écrire le principe fondamental de la dynamique dans $\mathcal{R}'$ projeté selon $\vec{e}_\theta$.

   b) Calculer l'angle θ_0 d'équilibre en fonction de Ω_0 et de la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ (on supposera toujours que Ω_0 est supérieur à ω_0, de telle sorte que $\theta_0 > 0$).

2. On va maintenant s'intéresser à la stabilité de cette position d'équilibre. Dans toute la suite du problème on se placera dans le référentiel Galiléen $\mathcal{R}$ du laboratoire. La vitesse angulaire $\dot{\phi}$ n'est maintenant plus une constante, mais peut varier en fonction du mouvement des boules autour de leur position d'équilibre.

   a) Calculer la vitesse $\vec{v}$ de chaque boule dans le référentiel $\mathcal{R}$ en coordonnées sphériques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$.

   b) Calculer le moment cinétique total $\vec{J}_O$ des boules par rapport à O. Calculer J_z, la projection selon $\vec{e}_z$ de $\vec{J}_O$, et justifier que cette quantité est conservée.

c) Décrire qualitativement le comportement du système si l'angle θ reçoit une légère perturbation positive.

3. a) Ecrire le Lagrangien du système en fonction des deux coordonnées θ et ϕ.

   b) Ecrire l'équation de Lagrange pour ϕ, et montrer que θ et $\dot{\phi}$ sont reliés par l'équation

$$\dot{\phi}\sin^2\theta = \sigma, \tag{2}$$

   où σ est une constante, que l'on exprimera en fonction de J_z (la composante selon z du moment cinétique), de m et de L.

   c) Ecrire l'équation de Lagrange pour θ puis, en utilisant l'équation (2), obtenez une équation différentielle du second ordre en θ en fonction de ω_0 et σ, ne faisant plus intervenir $\dot{\phi}$.

4. On s'intéresse maintenant à la stabilité de la rotation. Pour cela, on considère une petite perturbation au voisinage de l'angle d'équilibre θ_0 déterminé à la question 1. On pose alors $\theta(t) = \theta_0 + \epsilon(t)$, avec $|\epsilon(t)| \ll \theta_0$. On rappelle :

$$\cos(\theta_0+\epsilon) \simeq \cos(\theta_0) - \epsilon\sin(\theta_0) + O(\epsilon^2),$$
$$\sin(\theta_0+\epsilon) \simeq \sin(\theta_0) + \epsilon\cos(\theta_0) + O(\epsilon^2).$$

   a) Calculer σ en fonction de Ω_0 et de θ_0. En remplaçant $\theta(t)$ dans l'équation différentielle obtenue en question 3d, obtenez une équation différentielle pour $\epsilon(t)$.

   b) Par un développement limité à l'ordre 1 (les termes d'ordre 0 doivent se simplifier en exprimant ω_0 en fonction de Ω_0 et θ_0, cf. question 1b), montrer que l'équation différentielle pour ϵ peut s'écrire sous la forme :

$$\ddot{\epsilon} + \Omega_0^2\, K\, \epsilon = 0,$$

   où K est une constante que l'on exprimera en fonction de θ_0 seulement.

   c) Intégrer cette équation différentielle, en utilisant $\epsilon(0) = \epsilon_0$ et $\dot{\epsilon}(0) = 0$ comme conditions initiales. Que pouvez-vous en déduire quant à la stabilité du système ?

Question hors barème : Tracer sur un même graphique l'allure des courbes $\theta(t)$ et $\dot{\phi}(t)$. Le mouvement global du sytème (rotation + oscillations des boules) est-il périodique ?

Exercice 3 : Une hélice sur pivot

On considère une hélice en rotation rapide, dont l'axe est libre de pivoter autour d'un point fixe O (figure 3). Cette hélice est une fine tige homogène, de longueur L, de masse m, de centre de masse G et d'épaisseur négligeable. L'axe de l'hélice, de masse négligeable, est de longueur OG $= R$, et fait un angle θ avec la verticale. L'hélice tourne à vitesse angulaire Ω_0 constante imposée autour de cet axe OG. Le pivot en O contraint l'axe OG à ne tourner que dans le plan vertical $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$. On souhaite étudier l'influence de la rotation de l'hélice sur la loi de variation $\theta(t)$.

On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ le repère lié à l'hélice, avec $\vec{e}_3$ orienté selon l'axe OG, $\vec{e}_2$ le long de l'hélice et $\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$. On note ψ l'angle entre $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_2$, et $\Omega_0 = \dot{\psi}$ la vitesse angulaire de l'hélice selon $\vec{e}_3$.

On ne considère pas la gravité dans tout cet exercice ($g = 0$).

1. a) Quelle est la nature de la contrainte pour $\psi(t)$? (on explicitera la fonction de liaison $f(\{q_i\}, t) = 0$ de cette contrainte). Combien le système a-t-il de degrés de liberté ?

   b) Calculer la matrice d'inertie $\mathcal{I}_G$ de l'hélice par rapport à son centre de masse G dans le repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

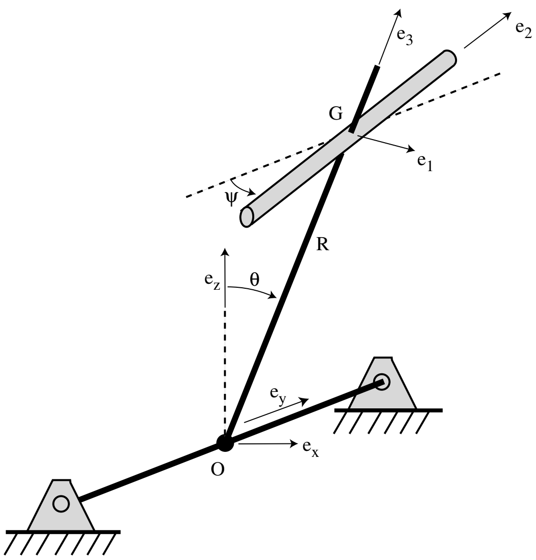

Figure 3: Une hélice montée sur un pivot.

c) En tenant compte des rotations $\dot{\theta}$ et $\dot{\psi}$, calculer le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$ dans le repère fixe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On considère qu'à l'instant $t = 0$, le vecteur $\vec{e}_2$ est aligné avec le vecteur $\vec{e}_y$. Montrer que, dans le repère mobile $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ lié à l'hélice, ce vecteur peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \sin \Omega_0 t \\ \dot{\theta} \cos \Omega_0 t \\ \Omega_0 \end{pmatrix}$$

Quelle figure géométrique décrit ce vecteur dans le repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$?

d) En décomposant l'énergie cinétique en un terme de translation de G et un terme de rotation autour de G, écrire le Lagrangien de ce système.

2. a) A partir de l'équation de Lagrange pour la coordonnée θ, montrer que la vitesse angulaire $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ s'écrit sous la forme :

$$\omega(t) = \frac{\omega_0}{1 + \alpha \sin^2 \Omega_0 t},$$

où $\omega_0 = \omega(0)$ est la vitesse angulaire initiale, et α est une constante que l'on exprimera en fonction de la géométrie du problème.

b) Tracer l'allure de $\omega(t)$, ainsi que l'allure de $\theta(t)$ (on ne demande pas de calculer la primitive de $\omega(t)$ pour obtenir $\theta(t)$). Que devient $\omega(t)$ dans la limite d'une très petite hélice ($L \ll R$) ? Interpréter physiquement ce résultat.

c) Mêmes questions pour la limite opposée d'une très grande hélice ($L \gg R$) ? Que pensez-vous de la vitesse angulaire moyenne $\langle \omega \rangle$ dans cette limite ?

Question hors barème : Que se passe-t-il si l'on remplace l'hélice par un disque homogène, en rotation autour de son axe de révolution $\vec{e}_3$?