**Licence de mécanique, Paris XI** **Année universitaire 2003/04**

# Examen de Mécanique

Mardi 13 Janvier 2004

**Durée : 3 heures - sans document**

## Exercice 1 : Maintien d'un satellite en orbite d'attente

Afin d'envoyer un satellite de télécommunication en orbite géostationnaire, le lanceur Ariane procède en deux étapes : dans un premier temps, le satellite est mis sur une *orbite d'attente*, c'est-à-dire une orbite circulaire de basse altitude (typiquement $h \simeq 200$ km), puis il est envoyé par l'intermédiaire d'une orbite elliptique vers son orbite géostationnaire finale (à environ 36 000 km d'altitude).

Il peut être intéressant de garder quelques temps le satellite sur son orbite d'attente avant de l'envoyer vers son orbite définitive. Mais à une telle altitude, la densité de l'air n'est pas négligeable, et il existe une force de frottement. Le but de ce problème est de calculer la durée maximale pendant laquelle le satellite peut se maintenir sur cette orbite d'attente compte tenu de ces frottements.

| | |
|---|---|
| Constante de gravitation | $\mathcal{G} = 6,67 \;\; 10^{-11}$ N.m$^2$.Kg$^{-2}$ |
| Masse de la Terre | $M_T = 6,0 \;\; 10^{24}$ Kg |
| Rayon de la Terre | $R_T = 6370$ km |
| Masse du satellite | $m = 2300$ Kg |
| Altitude de l'orbite d'attente | $h = 200$ km |

1- A partir du principe de la dynamique, calculer la vitesse $v_0$ du satellite en fonction de $\mathcal{G}$, $M_T$ et du rayon $r_0$ de l'orbite d'attente en l'absence de frottement. Faire l'application numérique. On suppose que le référentiel géocentrique est galiléen. En déduire la composante du moment cinétique perpendiculaire au plan de l'orbite $J_0$ en fonction de $m$, $\mathcal{G}$, $M_T$ et $r_0$.

On prend maintenant en compte la force de frottement de l'air, et on s'intéresse à l'évolution du rayon $r$, de la vitesse $v$ et du moment cinétique $J$ par rapport aux conditions initiales $r_0$, $v_0$, $J_0$ déterminées en (1).

Malgré la vitesse élevée du satellite, la très faible densité de l'air à cette altitude ($\rho \simeq 10^{-9}$ Kg.m$^{-3}$) fait que l'écoulement d'air autour du satellite reste de type laminaire ; le nombre de Reynolds $Re = \rho UL/\eta$ est de l'ordre de 0,3. Le frottement est donc de type visqueux, et peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{F}_v = -\alpha \vec{v},$$

avec $\alpha = 3 \; 10^{-4}$ N.m$^{-1}$.$s$.

2- Exprimer le théorème du moment cinétique par rapport au centre de la Terre (supposé immobile) en présence de frottement, et montrer que $J(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dJ}{dt} + \frac{1}{\tau} J = 0,$$

où $\tau$ est une constante de temps que l'on calculera. En déduire l'expression de $J(t)$ en fonction du moment cinétique initial $J_0$.

3- On suppose que la vitesse radiale $\dot{r}$ reste très petite devant la vitesse tangentielle $r\dot{\theta}$, de telle sorte que, dans le temps d'une révolution, l'orbite peut toujours être considérée comme circulaire. Dans ces conditions, l'expression de $v$ en fonction de $r$ établie en (1) reste valable à tout temps. A partir de la loi $J(t)$, en déduire les variations de $r(t)$ et $v(t)$ en fonction de $r_0$ et $v_0$.

4- **Question hors barème :** Combien de tours le satellite peut-il rester à $h = 200$ km d'altitude, avec une précision de 10 % sur cette altitude ?

## Exercice 2 : Oscillation d'un anneau suspendu à une tige horizontale

On considère un solide de révolution homogène d'axe $\Delta$. C'est un anneau cylindrique de hauteur $h$, de rayon intérieur $R_i$ et de rayon extérieur $R_e$ (voir figure 1). On désigne la masse volumique par $\mu$, la masse par $m$ et le centre de masse par $G$.

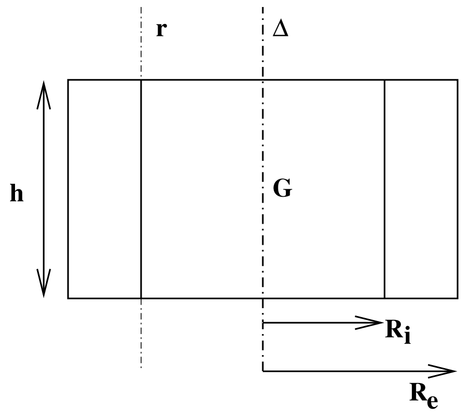


FIG. 1 – Cylindre vu en coupe de hauteur $h$, de rayon intérieur $R_i$ et de rayon extérieur $R_e$.

1- Calculer la masse $m$ et le moment d'inertie par rapport à l'axe $\Delta$, $I_\Delta$, en fonction de $\mu$, $h$, $R_i$ et $R_e$, puis $I_\Delta$ en fonction de $m, R_i$ et $R_e$.

2- Calculer $I_r$ le moment d'inertie de l'anneau par rapport à une génératrice du cylindre limitant intérieurement cet anneau, c'est-à-dire par rapport à une droite parallèle à l'axe $\Delta$ et s'appuyant sur le rayon intérieur.

3- L'anneau est suspendu à une tige horizontale, de centre $O$, d'axe $Ox$ et de rayon $\rho$. On utilise un trièdre fixe direct $Oxyz$ dont l'axe $Oz$ est dirigé suivant une verticale ascendante (voir figure 2). On étudie le mouvement de **roulement sans glissement** de l'anneau sur la tige tel que le mouvement se fasse toujours dans le plan $yOz$. On repère la position de l'anneau par l'angle $\phi = (Oz, OA)$ où $A$, situé dans le plan $yOz$, est le point de contact de l'anneau et de la tige dans le plan $yOz$. On note $g$ l'accélération de la pesanteur.
Exprimer les coordonnées cartésiennes de $\vec{OG}$ et sa vitesse $\vec{v}_G$, dans le repère fixe, en fonction de $\rho$, $R_i$, $\phi$, $\dot{\phi}$ et $\vec{e}_\phi$ (avec $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$ et $\vec{e}_\phi$ le vecteur unitaire représenté sur le dessin).

4- Quelle est la nature (rotation, translation ...) du mouvement du référentiel du centre de masse $Gx'y'z'$ ? De même, quelle est la nature du mouvement de l'anneau dans ce référentiel $Gx'y'z'$ ? A l'aide de la condition de roulement sans glissement de l'anneau sur la tige, montrer que la vitesse angulaire $\omega$ caractérisant le mouvement relatif s'écrit :

$$\omega = \left(1 - \frac{\rho}{R_i}\right)\dot{\phi}.$$

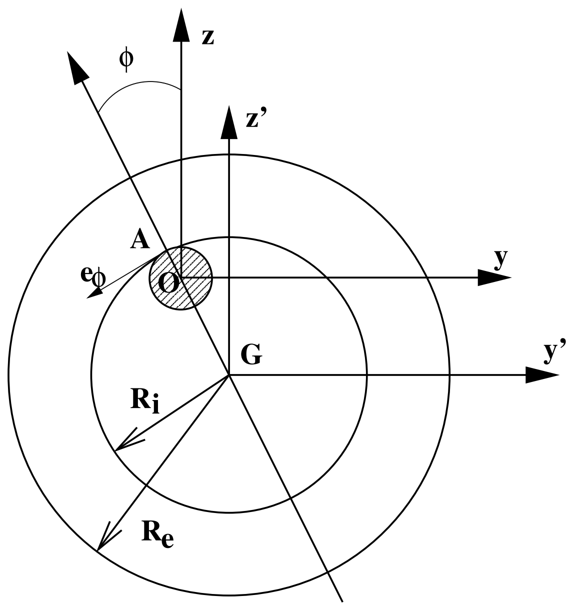


Fig. 2 – Cylindre suspendu à une tige horizontale (partie hachurée) de centre $O$, d'axe $Ox$ et de rayon $\rho$.

5- Quel est le nombre de coordonnées généralisées et de degré de liberté ? Exprimer en fonction de $\phi$, $\dot{\phi}$, $I_r$, $\rho$, $R_i$, $g$ et $m$ les énergies cinétique $T$ et potentielle $V$ (en choisissant $V = 0$ pour $\phi = 0$) de l'anneau. En déduire le lagrangien et l'équation du mouvement.

6- Résoudre l'équation du mouvement dans le cas de petites oscillations de l'anneau autour de sa position d'équilibre sur la tige. Déterminer l'expression littérale de la période $\tau$ de ces petites oscillations.

# Exercice 3 : Le disque d'Euler

On fait tourner sur sa tranche une pièce de monnaie sur une table horizontale. On suppose que le plan de la pièce n'est pas vertical (voir figure 3). On peut observer que l'angle $\alpha$ diminue progressivement tandis que la vitesse de rotation de la pièce croît. Au bout d'un certain temps, la pièce s'arrête de façon brutale en émettant un son de fréquence élevée.

Pour trouver ce résultat, on va d'abord étudier un disque homogène de masse $m$ roulant sans glisser et sans frottement avec l'air. Dans une seconde partie, on introduira du frottement avec l'air de façon phénoménologique (d'après *Euler's disk and its finite-time singularity*, K. Moffatt, Nature, volume 404, 2000). On se place dans le référentiel galiléen du laboratoire d'axe vertical de vecteur unitaire $\vec{e}_z$.

Soit un disque homogène de rayon $a$, de masse $m$ et d'épaisseur infiniment fine. On introduit le repère $(G,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ lié au disque (voir figure 3). On rappelle que les moments principaux d'inertie par rapport à ces axes propres sont $I_1 = I_2 = ma^2/4$ et $I_3 = ma^2/2$.

- **Disque sans frottement avec l'air**

  1- Justifier que le vecteur $\vec{\omega}$ porté par le vecteur unitaire $\vec{e}_1$ est le vecteur rotation instantanée du disque.

  2- On définit le vecteur rotation du disque vu dans le référentiel du laboratoire par

  $$\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z = \Omega_d\vec{e}_3 + \omega\vec{e}_1$$

  où $\vec{e}_3$ est le vecteur unitaire perpendiculaire au plan du disque. Trouver le lieu des points de contact décrit par le disque sur la table à la vitesse $\Omega\vec{e}_z$. Trouver le lieu des

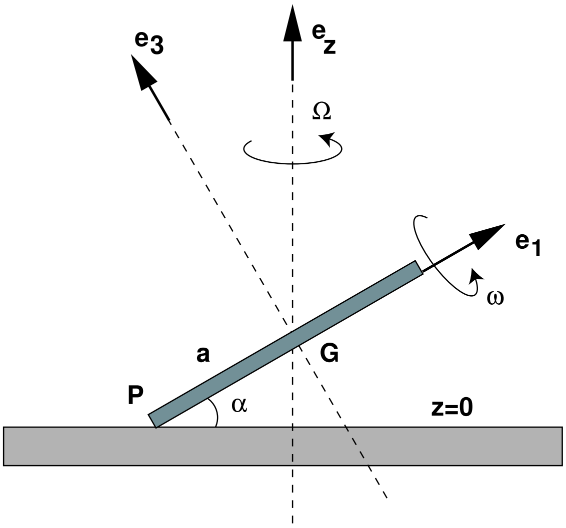


FIG. 3 – Disque vu en coupe de rayon $a$, de centre de masse $G$ et point de contact $P$.

points de contact décrit sur le disque à la vitesse $\Omega_d \vec{e}_3$. En utilisant la condition de roulement sans glissement, montrer que

$$\Omega_d = \Omega \cos \alpha.$$

Exprimer $\omega$ en fonction de $\Omega$ et $\alpha$.

3- On suppose que $\Omega$ reste constante. Ecrire le lagrangien du disque et en déduire l'équation de Lagrange pour $\alpha$. On fait l'approximation en petit angle $\alpha$. Montrer que l'équation du mouvement donne

$$\Omega^2 \alpha \simeq 4g/a.$$

4- Écrire l'énergie mécanique $E$ en fonction de $m$, $g$, $a$ et $\alpha$. Que peut-on dire de $\alpha$ et $E$ pour $\Omega$ constante ?

- **Questions hors barème : Disque avec frottement avec l'air**
On suppose que le frottement est dû à l'écoulement d'air de viscosité dynamique $\mu_{air}$ entre le disque et la table. Les autres sources de dissipation sont négligées. Un modèle de lubrification fournit la puissance dissipée

$$\phi_{dis} = -\pi \mu_{air} g a^2 / \alpha^2.$$

5- En écrivant que la variation temporelle de l'énergie mécanique est égale à cette puissance dissipée, montrer que l'équation en $\alpha$ est de la forme

$$\alpha = \alpha_0 \left( \frac{t_f - t}{t_f} \right)^{1/3}.$$

où $\alpha_0 = \alpha(t = 0)$ est la condition initiale, et $t_f$ une constante que l'on déterminera en fonction de $m$, $a$, $\alpha_0$ et $\mu_{air}$.

6- A quel instant l'angle $\alpha$ s'annule-t-il ? Trouver la loi régissant $\Omega$. Tracer $\alpha(t)$ et $\Omega(t)$. Commenter leur comportement quand $t$ tend vers $t_f$.