Licence de mécanique, Paris XI **Année universitaire 2001/02**

Examen de Mécanique

Mercredi 16 Janvier 2002

Durée : 3 heures – sans document

Exercice 1 : Forces centrales

On reconsidère le problème de Kepler: un corps ponctuel de masse m est soumis à une force centrale en $1/r^2$. On sait que le mouvement est plan; soit (r, θ) les coordonnées polaires du corps, la force étant attractive vers l'origine. On sait que les orbites sont des coniques; pour cet exercice, on ne considérera que le cas d'orbites *elliptiques*.

Notation: $\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire radial, $\vec{u}_\theta$ le vecteur unitaire orthoradial, $\vec{u}_z$ le vecteur unitaire tel que $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est orthonormé direct. Aussi $\vec{P} = m\vec{V}$ est la quantité de mouvement, $\vec{J}$ le moment cinétique du corps par rapport à l'origine, et $U(r) = -k/r$ l'énergie potentielle (on a $k > 0$ une constante).

On introduit le vecteur

$$\vec{A} = \vec{P}_\wedge \vec{J} - mk\vec{u}_r$$

1) Montrer que $\vec{J}$ est une constante du mouvement, et que $\vec{A} \cdot \vec{J} = 0$.

2) Écrire l'équation pour $d\vec{P}/dt$ et pour $d\vec{A}/dt$. En déduire que $\vec{A}$ est une constante du mouvement.

3) Calculer $\vec{A} \cdot \vec{r}$ (où $\vec{r} = r\vec{u}_r$). N.B.: on posera $\ell = \vec{J} \cdot \vec{u}_z$; on pourra utiliser la symétrie de permutation circulaire du produit mixte de trois vecteurs.

4) Représenter par un schéma : l'origine du système de coordonnées polaires, l'orbite, les foyers et les axes portant les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{J}$. Pour obtenir l'axe portant $\vec{A}$, on pourra considérer l'expression de ce vecteur quand r est à son minimum.

5) Prendre les coordonnées polaires pour lesquelles l'axe Ox est suivant $\vec{A}$; l'angle θ est alors mesuré par rapport à cet axe. En partant de l'expression de $\vec{A} \cdot \vec{r}$, déterminer l'expression en coordonnées polaires de l'orbite $r = r(\theta)$ en fonction de ℓ, m, k et $|\vec{A}|$.

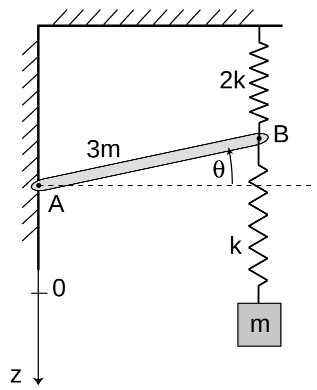
6) Exprimer l'excentricité de l'orbite en fonction de $|\vec{A}|$, m et k. Donner l'expression de la valeur minimale de r en fonction de E (l'énergie mécanique du corps), m, k et ℓ.

7) On sait que E et ℓ spécifient complètement la géométrie de l'orbite, c'est-à-dire ses demi-grands axes. Dans cet exercice, nous avons découvert deux autres grandeurs conservées, l'orientation et la norme du vecteur $\vec{A}$. Quelles informations supplémentaires apportent ces deux grandeurs ?

Exercice 2 : Oscillations couplées

On cherche à déterminer la nature des oscillations du système mécanique représenté ci-dessous. Une tige homogène, de longueur ℓ et de masse $3m$, pivote sans frottement autour du point A ; on note θ l'angle qu'elle fait avec l'horizontale. Deux ressorts sont fixés à l'extrémité B de cette tige : le premier, de raideur $2k$, la relie à un support fixe, et le second, de raideur k, la relie à une masse m. Les longueurs à vide des ressorts sont choisies telles que $z = 0$ et $\theta = 0$ à l'équilibre.

On ne s'intéresse qu'aux petites oscillations de ce système. Dans cette approximation, les deux ressorts sont supposés rester verticaux, et la coordonnée z suffit à repérer la position de la masse m (l'axe est ici dirigé vers le bas). **On négligera la pesanteur dans tout ce problème ($g = 0$).**



1) Calculer le Lagrangien de ce système pour les coordonnées z, θ.

2) Montrer que les équations de Lagrange peuvent s'écrire sous la forme d'une équation différentielle matricielle :
$$\ddot{X} + \omega_0^2 \mathcal{M} X = 0,$$
où l'on a posé
$$X = \begin{pmatrix} z/\ell \\ \theta \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \omega_0 = \sqrt{k/m}.$$

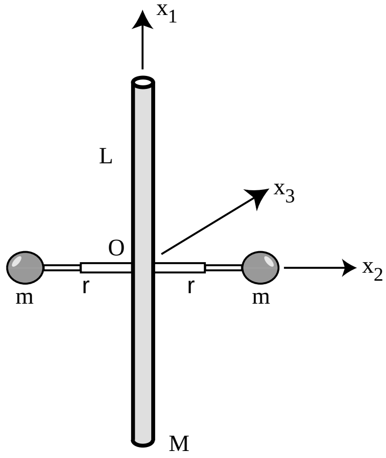
3) Calculer les valeurs propres a_1 et a_2 de $\mathcal{M}$ et les vecteurs propres X_1 et X_2 associés (exprimés comme une combinaison linéaire de z/ℓ et θ). Montrer que l'on se ramène ainsi à un système de deux équations différentielles non couplées :
$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{X}_1 + a_1\omega_0^2 X_1 = 0 \\ \ddot{X}_2 + a_2\omega_0^2 X_2 = 0. \end{array} \right. \tag{1}$$
Exprimer la solution générale de ces équations différentielles pour des conditions initiales $X_1(0) = X_{10}$, $X_2(0) = X_{20}$ et $\dot{X}_1(0) = \dot{X}_2(0) = 0$.

4) Exprimer z/ℓ et θ comme une combinaison linéaire de X_1 et X_2. En déduire l'évolution du système (c'est-à-dire $z(t)$ et $\theta(t)$) si, à $t = 0$, on impose les conditions initiales :
$$\left\{ \begin{array}{ll} z(0) = 0, & \dot{z}(0) = 0 \\ \theta(0) = \theta_0, & \dot{\theta}(0) = 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

Exercice 3 : L'OVNI tournant

On s'intéresse à la mise en rotation rapide d'un OVNI dans l'espace. Cet objet volant est constitué de deux parties : un corps central entouré de deux satellites. Le corps central est assimilable à une tige de longueur L, de masse M et d'épaisseur négligeable. Les deux satellites (considérés comme ponctuels) sont chacun de masse m, et sont maintenus à une distance ρ par deux supports de masse négligeable, fixés rigidement à mi-hauteur du corps central.

On note O le centre de masse de ce système, et (x_1, x_2, x_3) le repère lié au solide. x_1 est l'axe de symétrie du corps central, x_2 l'axe des satellites et x_3 l'axe orthogonal au plan (x_1, x_2). On rappelle les équations d'Euler dans le cas d'une rotation libre :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} I_1\dot{\Omega}_1 - (I_2 - I_3)\Omega_2\Omega_3 & = & 0 \\ I_2\dot{\Omega}_2 - (I_3 - I_1)\Omega_3\Omega_1 & = & 0 \\ I_3\dot{\Omega}_3 - (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2 & = & 0 \end{array} \right. \tag{3}$$
où le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega} = \Omega_1\vec{x}_1 + \Omega_2\vec{x}_2 + \Omega_3\vec{x}_3$ est exprimé dans le repère lié au solide.



1) Calculer la matrice d'inertie $\mathcal{I}_O$ de l'OVNI par rapport à O dans le repère (x_1, x_2, x_3). On détaillera le calcul de chacune des composantes. Montrer que l'écartement ρ des satellites permet de distinguer deux configurations selon l'ordre des moments d'inertie principaux :

$$\begin{array}{lll} A: & I_1 < I_2 < I_3 & \text{pour } \rho < \rho_c \\ B: & I_2 < I_1 < I_3 & \text{pour } \rho > \rho_c \end{array}$$

où ρ_c est un écartement seuil que l'on déterminera en fonction de L, m et M. Dans la suite, on exprimera les moments d'inertie en fonction de m, ρ et ρ_c.

2) On s'intéresse dans un premier temps à la stabilité de la rotation autour de l'axe x_1, dans chacune des configurations A et B. Pour cela on considère le vecteur instantané de rotation sous la forme

$$\vec{\Omega} = \Omega_1 \vec{x}_1 + \vec{\omega}(t),$$

telle que la perturbation $\vec{\omega}(t) = \omega_1(t)\vec{x}_1 + \omega_2(t)\vec{x}_2 + \omega_3(t)\vec{x}_3$ soit d'amplitude très petite devant Ω_1.

   a) Montrer que, au premier ordre en ω, les équations d'Euler conduisent à $\omega_1 =$cste, et que les composantes selon x_2 et x_3 de la perturbation satisfont les équations différentielles :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \ddot{\omega}_2 + K\omega_2 & = & 0 \\ \ddot{\omega}_3 + K\omega_3 & = & 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

   où K est une constante que l'on exprimera en fonction de Ω_1, ρ et ρ_c.

   b) Intégrer ces équations différentielle en distinguant les configurations A et B, et décrire la trajectoire du vecteur instantané de rotation dans le repère du solide. Préciser la vitesse angulaire de précession Ω_p dans le cas de la trajectoire stable. Quelle situation reconnaît-on pour $\rho \ll \rho_c$?

   c) Que pensez-vous de la stabilité de la rotation si l'objet disposait de 4 satellites plutôt que de 2, disposés symétriquement selon x_2 et x_3 ?

3) Afin de mettre l'OVNI en rotation rapide à partir d'une faible rotation initiale $\vec{\Omega}_i = \Omega_i \vec{x}_1$, on peut agir sur l'écartement des satellites au moyen d'un petit moteur interne, de masse négligeable et placé en O. On considère un déplacement amenant les satellites d'une distance $\rho_i = \rho_c$ à $\rho_f = \rho_c/2$. On suppose que ce déplacement s'effectue sans frottement.

   a) Calculer la vitesse angulaire finale Ω_f en fonction de la vitesse angulaire initiale Ω_i.

   b) On se place dans le référentiel non galiléen lié au solide en rotation. Évaluer le travail W fourni par le moteur au cours du déplacement des satellites. On rappelle l'expression des accélérations d'entraînement et de Coriolis :

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{\rho} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{\rho}), \qquad \vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{\rho}}{dt}.$$

c) On se place maintenant dans le référentiel fixe. Vérifier que l'accroissement d'énergie cinétique de rotation $\Delta T = T_f - T_i$ lors du passage de ρ_i à ρ_f correspond bien au travail fourni par le moteur.