Licence de mécanique, Paris XI **Année universitaire 2004/05**

Devoir 2 de Mécanique

Pour le vendredi 17 décembre 2004

Pendule simple et pendules couplés

I - Approche Newtonienne de deux pendules identiques couplés

On considère deux pendules identiques, chacun étant constitué d'une masse ponctuelle m et d'une tige sans masse de longueur l, et astreints à osciller dans un plan vertical. On repère par θ_1 et θ_2 l'angle des 2 pendules. Les deux masses sont reliées par un ressort sans masse, de raideur k (voir figure 1), dont la longueur à vide est égale à la distance entre les deux masses lorsque $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Dans tout le problème, on se place dans l'approximation des petites oscillations.

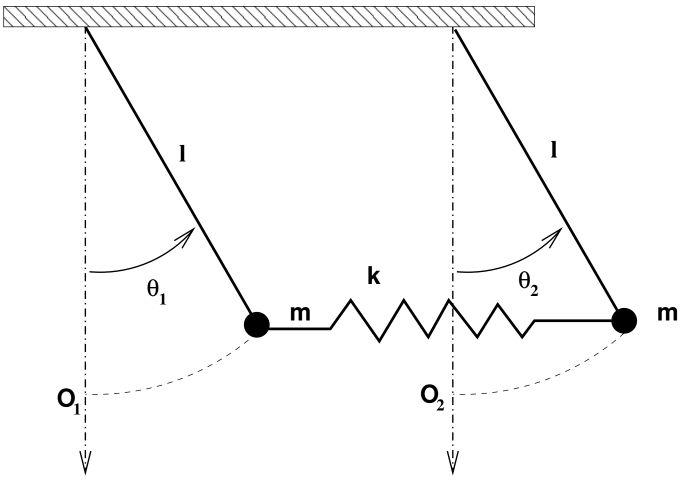

Figure 1: Deux pendules de masse m et de longueur l couplés par un ressort de raideur k.

1- A partir du principe fondamental de la dynamique, écrire les équations différentielles pour θ_1 et θ_2.

2- On introduit les deux coordonnées généralisées $X = \theta_1 + \theta_2$ et $Y = \theta_1 - \theta_2$. Montrer que les équations du mouvement pour X et Y correspondent à celles de deux oscillateurs harmoniques, dont on précisera les pulsations propres ω_0 et $\omega_c > \omega_0$ correspondantes.

3- A quoi correspond le mouvement tel que $Y = 0$ (faire un dessin) ? De même pour $X = 0$ (faire un dessin) ? Interpréter le fait que $\omega_c > \omega_0$.

II - Approche Lagrangienne de deux pendules couplés

On se place toujours dans l'approximation des petits angles et on étudie maintenant deux pendules de longueur différente l_1 et l_2, avec deux masses différentes m_1 et m_2, couplés par un ressort de raideur k (voir figure 2). Ici encore la position de repos du ressort correspond à $\theta_1 = 0 = \theta_2$.

1- Ecrire l'expression de l'énergie cinétique T du système en fonction de θ_1 et θ_2 et des données du problème.

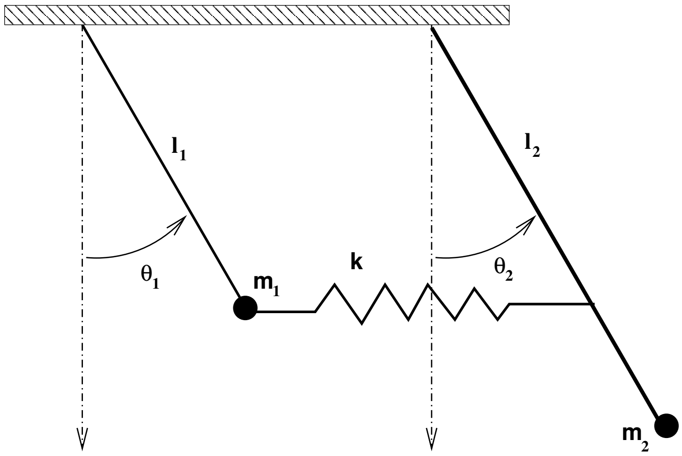

Figure 2: Deux pendules couplés par un ressort de raideur k avec deux masses m_1, m_2 et deux tiges sans masse de longueur l_1, l_2.

2- La présence du ressort induit un couplage mécanique entre les deux pendules de la forme

$$V_R = \frac{1}{2}\alpha(\theta_1 - \theta_2)^2$$

où α est une grandeur physique proportionnelle à la raideur k du ressort. Quel est le signe de α ?

Ecrire l'expression de l'énergie potentielle totale (on choisira la valeur de la constante arbitraire de telle sorte que $V(\theta_1 = 0 = \theta_2) = 0$), et en déduire l'expression d'un Lagrangien du système. Par analogie avec le I, combien de pulsations s'attend-on à trouver autour de la position d'équilibre ? Ces pulsations sont appelées *pulsations propres*, notées ω_{P1} et ω_{P2}.

3- On s'intéresse aux petites oscillations autour de la position d'équilibre. On essaie d'imaginer ce que devient le système mécanique dans les deux cas extrêmes où $\alpha \longrightarrow 0$ et $\alpha \longrightarrow \infty$

a) On suppose que $\alpha \longrightarrow 0$. Vers quel système physique tend le système considéré ? Quelles sont les valeurs des pulsations propres ω_{P1} et ω_{P2} ?

b) On suppose que $\alpha \longrightarrow \infty$. Donner une interprétation physique de cette hypothèse et décrire le système limite par une phrase et un dessin. Que pensez-vous du nombre de degrés de liberté du système lors du passage à cette limite ?

4- On considère un pendule composé d'une tige de masse négligeable, portant deux masses m_1 et m_2, comme le montre la figure 3.

Ecrire, toujours dans l'approximation des petites oscillations, le Lagrangien de ce système, et calculer sa pulsation propre ω' en fonction de $g,\ m_1,\ m_2,\ l_1$ et l_2.

Montrer que $\omega_{P2} < \omega' < \omega_{P1}$, et interpréter d'après le système étudié précédemment.

5- On revient à un couplage α quelconque.

a) Ecrire les équations du mouvement dérivant du Lagrangien obtenu en II-2. En introduisant dans ces équations des solutions de la forme

$$\theta_1(t) = A_1 e^{i\omega t},\ \theta_2(t) = A_2 e^{i\omega t},$$

écrire le système d'équations obtenues sous la forme matricielle

$$\mathcal{M}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

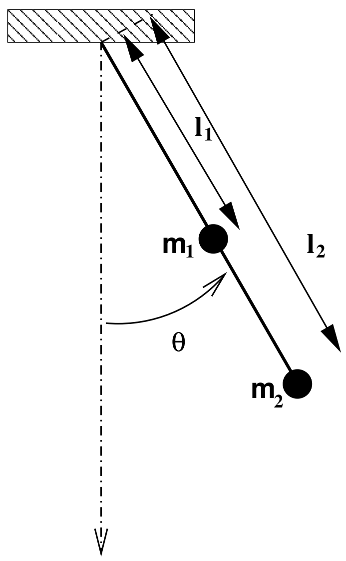

Figure 3: Pendule pesant avec deux masses m_1 et m_2 placées sur une tige sans masse à deux longueurs l_1 et l_2.

où $\mathcal{M}$ est une matrice 2×2 que l'on exprimera en fonction des données du problème.

b) Pour obtenir les pulsations propres de ce système, on cherche des solutions non nulles, c'est-à-dire telles que $(A_1 \quad A_2) \neq (0 \quad 0)$. Pour que ce système admette de telles solutions non nulles, il faut que le déterminant de $\mathcal{M}$ soit nul. En déduire que $\lambda = \omega^2$ vérifie l'équation du second degré :

$$a\lambda^2 - (b_0 + b_1\alpha)\lambda + (c_0 + c_1\alpha) = 0, \tag{1}$$

où l'on a posé :

$$a = m_1 m_2 l_1^2 l_2^2, \quad b_0 = m_1 m_2 l_1 l_2 g(l_1 + l_2), \tag{2}$$

$$b_1 = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2, \quad c_0 = m_1 m_2 l_1 l_2 g^2, \quad c_1 = (m_1 l_1 + m_2 l_2) g. \tag{3}$$

c) Calculer les racines λ_1^0 et λ_2^0 de l'équation (1) pour $\alpha = 0$ (on supposera que $\lambda_2^0 < \lambda_1^0$). Commenter ce résultat en termes d'études précédentes.

d) On souhaite accéder à la connaissance du comportement des solutions $\lambda_1(\alpha)$ et $\lambda_2(\alpha)$ pour α quelconque de façon graphique. On travaille dans le plan (α, λ). L'équation (1) est une conique dans ce plan. Préciser la région physiquement acceptable du plan. Montrer que la conique possède deux asymptotes, dont une horizontale et une oblique (les courbes $\lambda(\alpha)$ sont donc des branches d'hyperbole). Comment varient ω_{P1} et ω_{P2} quand on rigidifie progressivement le système en augmentant la raideur du ressort ?