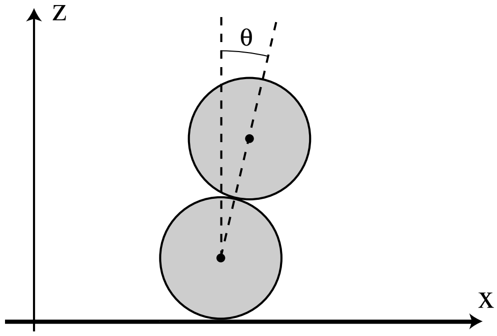
Licence de mécanique, Paris XI **Année universitaire 2003/04**

Devoir 2 de Mécanique

Pour le mercredi 7 janvier 2004

Problème 1 : Chute de billes

Deux sphères uniformes parfaitement lisses, de rayon R et de masse m, sont posées l'une sur l'autre sur un plan horizontal. Elles peuvent glisser l'une sur l'autre et sur le plan sans frottement. Dans sa chute, la bille du haut va mettre en mouvement celle du bas. On se restreint à une étude dans le plan vertical de la chute.

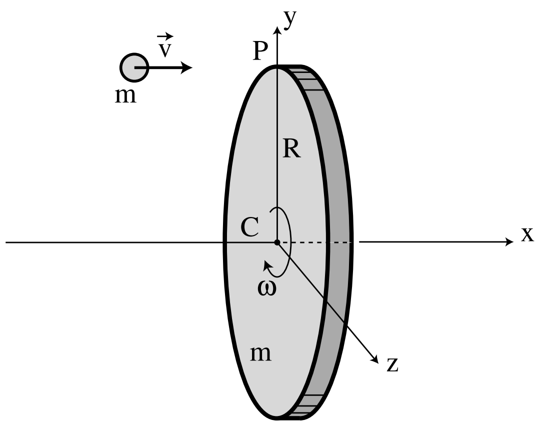


1. Montrer que si chaque bille a initialement son vecteur instantané de rotation nul, $\vec{\Omega}_{1,2} = \vec{0}$, alors il le reste à tout temps.
2. On travaille dans le cas $\vec{\Omega}_{1,2} = \vec{0}$. Ecrire le Lagrangien de ce système, en utilisant comme coordonnées généralisées la position x de la bille inférieure et l'angle θ que fait la bille supérieure avec la verticale passant par la bille inférieure.
3. Ecrire le système d'équations différentielles du mouvement ; déterminer $\theta(t)$ au tout début de la chute, pour $\theta \simeq 0$. Comparer le temps caractéristique de chute avec celui obtenu dans le cas où la bille du bas est fixée au sol. Interprétation ?
4. Qualitativement, que se passe-t-il maintenant si les billes roulent sans glisser ?

Problème 2 : Collision avec un disque tournant

Un disque fin homogène, de centre C, de masse m et de rayon R, tourne autour de l'axe x à vitesse angulaire ω. Une masse ponctuelle, de même masse m et de vitesse initiale v selon x, entre en collision avec le disque au point P, à la périphérie du disque. On suppose que la collision est parfaitement inélastique, c'est-à-dire que la particule vient se coller au disque et y reste attachée. On s'intéresse au mouvement de l'ensemble $\{$ disque + particule $\}$ après l'impact.

On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ le référentiel lié au disque, et $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ le référentiel fixe galiléen. Avant la collision, l'axe $\vec{e}_1$ coincide avec l'axe $\vec{e}_x$. Au moment précis de l'impact, les axes $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ coincident avec $(\vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On ne considère pas la gravité dans ce problème. Les quantités après l'impact seront notées avec un prime '.



1. Calculer la vitesse $\vec{v}_G$ du centre de masse du système, et représenter le système avant l'impact dans ce référentiel du centre de masse. Décrire qualitativement quel serait le mouvement de l'ensemble $\{$ disque + particule $\}$ après l'impact en l'absence de rotation initiale du disque.

2. On se place dans le référentiel du centre de masse G de l'ensemble $\{$ disque + particule $\}$. En raisonnant sur la conservation du moment cinétique par rapport à G lors de l'impact, déterminer le vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}'$ de l'ensemble $\{$ disque + particule $\}$ juste après l'impact en fonction de ω et v/R. Représenter la direction de l'axe instantané de rotation dans les cas $\omega R/v$ faible ou élevé.

3. Calculer la variation d'énergie cinétique dissipée lors de la collision dans le référentiel du centre de masse, et interpréter.