Licence de mécanique, Paris XI **Année universitaire 2002/03**

Devoir 2 de Mécanique

Pour le mercredi 8 janvier 2003

Exercice 1 : Rutherford et la structure de l'atome

Avant Rutherford, l'atome était conçu comme une boule homogène. Son expérience montra au contraire que les atomes sont très inhomogènes et en particulier que leurs charges positives sont concentrées en des petits grains (les noyaux).

Dans le référentiel du laboratoire, on a une cible immobile formée d'atomes lourds (de l'or). On envoit un faisceau de particules α (noyaux d'hélium) sur cette cible. La masse des électrons étant plusieurs milliers de fois plus faibles que celle des noyaux, on les néglige. On va modéliser l'effet d'un noyau d'or (de masse M) sur la trajectoire d'une particule α (de masse m). On supposera ces corps ponctuels.

a) *Généralités* – La force de Coulomb entre les deux particules est répulsive et varie en $1/r^2$, $|\vec{F}| = K/r^2$. Donner l'expression de l'énergie potentielle $V(r)$ quand on on impose $V(r = \infty) = 0$. Spécifier quelles sont les grandeurs conservées lors du mouvement. Pourquoi et comment peut-on ramener ce système à un problème à un corps; donner la masse réduite μ associée.

b) *Repère du centre de masse* – Dans tout repère galiléen lié au centre de masse G, montrer que le mouvement est plan. Dans ce plan, on définit θ l'angle que fait le vecteur $\vec{r}_{12}$ (allant du corps 1 au corps 2) avec l'axe des x. On notera dans la suite $r = |\vec{r}_{12}|$. Donner l'expression du Lagrangien $\mathcal{L} = T - V$ en fonction de μ, de r, θ, $\dot{r}$ et $\dot{\theta}$. On appelle $\vec{J}$ le moment cinétique par rapport à G. $\vec{J}$ peut s'exprimer en fonction de m, M, etc… Démontrer qu'on a bien $\vec{J} = \vec{r}_{12} \wedge \mu\dot{\vec{r}}_{12}$. On pose pour la suite $\vec{J} = \ell\vec{u}_z$.

c) *L'orbite* – Ecrire les équations différentielles couplées du mouvement pour r et θ. Eliminer $\dot{\theta}$ au profit de ℓ, poser $u = 1/r$, et déduire l'équation différentielle pour u fonction de θ. Résoudre cette équation. Quelle est la nature de la courbe $r(\theta)$?

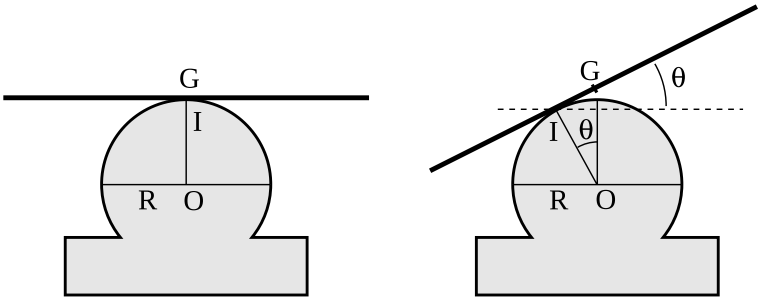
d) *Un peu de géométrie* – On se donne comme condition initiale à $t \to -\infty$ $r \to \infty$, $\theta \to \pi$ et $\dot{\vec{r}}_{12} \to -v\vec{u}_x$. La droite portant $\dot{\vec{r}}_{12}$ dans cette limite est à la distance b (appelé paramètre d'impact) de l'axe des x. Exprimer ℓ en fonction de ces données. Faire un dessin de la courbe $r(\theta)$ et discuter avec soin sa nature quand $t \to +\infty$. Quelle relation trouvez vous pour l'angle des deux droites délimitant le mouvement à $t = \pm\infty$?

Exercice 2 : Planche à bascule

Une planche homogène d'épaisseur négligeable, de longueur ℓ et de masse m est placée sur un cylindre de rayon R et fixé à l'horizontal (voir la figure). Quand la planche est horizontale, c'est son centre de masse G qui est en contact avec le cylindre.

La planche roule sans glisser sur ce cylindre et ainsi l'énergie mécanique est conservée. La planche est soumise à la force de pesanteur (qui passe par G) et à la réaction du cylindre. Comme on suppose que la planche reste en contact sans glisser, $\theta(t)$ spécifie entièrement l'évolution du système.

a) *Etude de l'énergie potentielle* – Calculer la hauteur du point G en fonction de θ. (On prendra pour origine O le centre du cercle sur la figure et on remarquera que G n'est pas à la verticale de O si $\theta \neq 0$.) Bien détailler le calcul en utilisant la condition de roulement sans glissement. En déduire l'énergie potentielle $V(\theta)$. Tracer $V(\theta)$ pour $-\infty < \theta < \infty$. (Si la planche était infiniment longue



et restait toujours en contact avec le cylindre, ceci aurait en sens physique; dans la pratique, on se limitera à $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.) Quels sont les points d'équilibres ? Donner leur stabilité.

b) *Expression de l'énergie cinétique* – Soit I le point de contact planche - cylindre indiqué sur la figure. Montrer par un raisonnement limpide que l'énergie cinétique T de la planche est donnée par

$$T = \frac{1}{2}\mathcal{I}\dot{\theta}^2$$

où $\mathcal{I}$ est le moment d'inertie de la planche par rapport au point I et $\dot{\theta} = d\theta/dt$. Calculer les longueurs de la planche de part et d'autre de I ; en déduire $\mathcal{I}$ en fonction de θ, R, m et ℓ.

c) Petites oscillations – Donner le Lagrangien du système et l'équation différentielle que satisfait $\theta(t)$. On fait maintenant l'approximation des petites oscillations. Décrire le mouvement dans cette limite, et donner sa période.

d) Oscillations non harmoniques– Le mouvement d'un oscillateur harmonique est "pur", $x(t) = a\sin(\omega t + \phi)$. C'est comme une corde vibrante avec une seule fréquence. Ici on s'intéresse à des oscillations d'amplitudes non infinitesimales qui donnent lieu à plusieurs harmoniques. En partant du Lagrangien (et en s'aidant si nécessaire d'un dessin pour $V(\theta)$), montrer que si l'énergie cinétique est suffisamment faible, alors le mouvement est périodique. Soit T cette périod, $\theta(t+T) = \theta(t)$. Le théorème de Fourier montre qu'on peut représenter cette fonction par une série

$$\theta(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \sin(n\frac{2\pi}{T}t + \phi_n)$$

On prend l'origine des temps pour que $t = 0$ corresponde à $\theta = 0$. Montrer (on pensera en particulier aux symétries du système) que $\phi_n = 0$ et aussi que $A_n = 0$ pour n pair. L'utilisation de cette série est un peu fastidieuse mais nécessaire si on veut étudier le mouvement non harmonique. On se contente ici de considérer le principe du calcul.

(1) Supposons A_1 donné; expliquer physiquement pourquoi il est alors possible de déterminer T ainsi que tous les autres A_n. Inversement, si T est donné, les A_n sont-ils déterminés?

(2) Si $A_1 \to 0$, pourquoi $A_n/A_1 \to 0$ pour tout $n \neq 1$?

(3) On écrit les équations du mouvement en utilisant la décomposition de Fourier de θ. Comment proposeriez-vous de déterminer tous les A_n étant donné T ?