Licence de mécanique, Paris XI **Année universitaire 2001/02**

Devoir 2 de Mécanique

Pour le jeudi 20 décembre 2001

L'action d'une chute libre

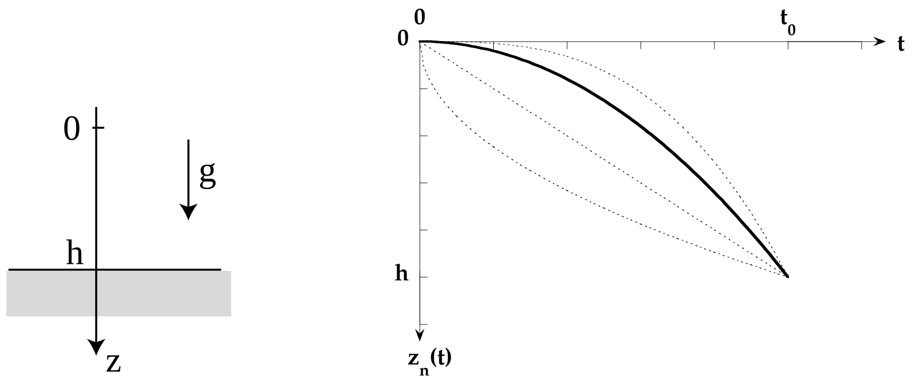


Figure 1: La trajectoire réelle en trait plein (pour n=2), et différentes trajectoires fictives en traits pointillés (pour n=1/2, 1 et 3).

On considère la chute libre de hauteur h d'une particule dans le champ de pesanteur g. Par commodité, l'axe z est orienté vers le bas, de telle sorte que $z(0) = 0$ et $z(t_0) = h$, où t_0 est le temps de chute. On cherche à vérifier que l'intégrale d'action,

$$S = \int_0^{t_0} \mathcal{L}(z, \dot{z}, t)dt,$$

est bien extrémale pour la trajectoire réelle connue $z(t) = \frac{1}{2}gt^2$ de cette chute libre. On va restreindre notre recherche à la classe de trajectoires fictives vérifiant les mêmes conditions aux limites ($z = 0$ à $t = 0$ et $z = h$ à $t = t_0$), et s'écrivant sous la forme

$$z_n(t) = c_n t^n,$$

où c_n est une constante vérifiant ces conditions aux limites (dans le cas $n = 2$, on retrouve la trajectoire réelle avec $c_2 = g/2$).

Calculer l'action S_n associée à la trajectoire $z_n(t)$ et la mettre sous la forme

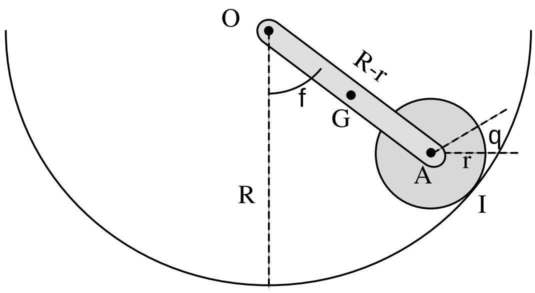
$$S_n = m\sqrt{gh^3}\, f(n),$$

où $f(n)$ est une fonction sans dimension que l'on identifiera. Déterminer une condition sur n pour que l'action soit extrémale, et vérifier que la valeur $n = 2$ satisfait bien cette condition (on ne demande pas d'en trouver d'autre). En déduire que l'action de la trajectoire fictive $z_n(t)$ peut s'écrire au voisinage de la trajectoire réelle $n = 2$ (au second ordre en $n - 2$) :

$$S_n \simeq S_2 + A(n-2)^2.$$

(NB: Il existe une autre valeur de n vérifiant la condition d'extremum : $n = -1-2^{1/3}-2^{2/3} \simeq -3,847$. Qu'en pensez-vous ?)

Pendule roulant



Calculer la période des petites oscillations du système mécanique représenté sur la figure ci-dessus. Un disque, de masse m et de rayon $AI = r$, roule sans glisser à la surface intérieure d'un support circulaire de rayon R (I est le point de contact disque-support). Ce disque est relié au centre O du cercle par une tige, de masse M et de longueur $OA = 2OG = R - r$.