Licence de mécanique, Paris XI **Année universitaire 2004/05**

Devoir 1 de Mécanique

Pour le vendredi 29 octobre 2004

La physique du yoyo

On cherche à calculer la vitesse de descente d'un yoyo lâché sans vitesse initiale du point $z = 0$. Ce yoyo, de masse m, est constitué d'un grand cyclindre extérieur, de rayon R, et d'un petit cylindre intérieur (le moyeu), de rayon r_0, autour duquel s'enroule le fil de longueur L. On repère la position du yoyo par rapport à la hauteur de son centre de masse z, avec $0 \leq z \leq L$ (l'axe z est dirigé vers le bas ici), et son orientation par l'angle θ (on a $\dot{\theta} < 0$ lors de la descente). On suppose que le fil ainsi que la trajectoire du yoyo restent toujours verticaux. Dans la première partie, on néglige l'épaisseur du fil, tandis que dans la seconde on s'intéresse à l'influence de cette épaisseur sur la vitesse de descente.

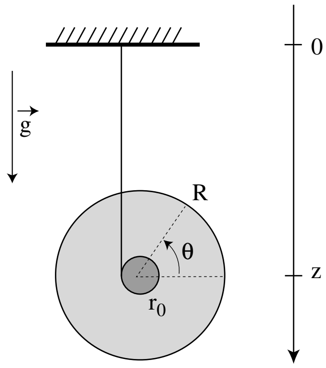

Figure 1: Schéma du yoyo avec un fil fin.

1. Cas du fil d'épaisseur nulle

1. Faites un bilan des forces s'appliquant sur le yoyo lors de sa descente, et représentez-les sur une figure. L'énergie est-elle conservée dans ce problème ? et le moment cinétique du yoyo par rapport à son centre de masse ? Justifiez soigneusement vos réponses.

2. On considère que le rayon du moyeu r_0 est suffisamment petit pour que le moment d'inertie I du yoyo par rapport à son axe de rotation soit simplement celui d'un cylindre de rayon R. Calculer I en fonction de m et de R (on détaillera le calcul de l'intégrale).

3. Calculer l'énergie mécanique en fonction de z, $\dot{z}$ et $\dot{\theta}$ et des paramètres du problème. En explicitant la relation géométrique entre z et θ, exprimer cette énergie en fonction de z et $\dot{z}$ uniquement (sans faire intervenir $\dot{\theta}$).

4. Calculer l'énergie mécanique à l'instant $t = 0$, en $z = 0$, et en déduire que la vitesse verticale est donnée par
$$\dot{z} = \sqrt{2gz}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r_0}\right)^2\right]^{-1/2}. \tag{1}$$
Comparer cette expression à celle que l'on obtiendrait pour la chute libre d'une masse ponctuelle, et interpréter. Représenter sur un même graphique l'allure de $\dot{z}$ en fonction de z pour une chute libre, et pour un yoyo tel que $R = 4r_0$.

5. Intégrer l'équation différentielle (1), et calculer le temps de chute T_c. Application numérique : $r_0 = 0,5$ cm, $R = 2$ cm, $L = 80$ cm. Comparer T_c au temps de chute libre d'une masse ponctuelle sur une même hauteur.

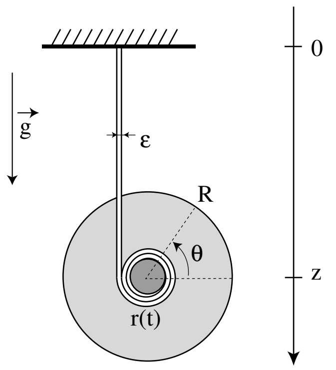

Figure 2: Schéma du yoyo avec un fil d'épaisseur ϵ.

2. Cas du fil d'épaisseur non nulle

On considère maintenant que le fil a une certaine épaisseur ϵ non nulle (figure 2). Le fil s'enroule donc maintenant autour d'un moyeu central dont le rayon $r(t)$ dépend du nombre de tours n du fil autour du moyeu. On néglige la masse du fil, et on considère donc que le moment d'inertie du yoyo est le même que dans le cas $\epsilon = 0$.

1. En exprimant le nombre de tours n en fonction de θ, montrer que le rayon d'enroulement peut s'écrire

$$r(\theta) = r_0 + \frac{\epsilon}{2\pi}\theta$$

(on considère pour simplifier que ce rayon varie continûment lorsque θ varie). Dans cette équation, l'origine $\theta = 0$ est prise lorsque le fil est entièrement déroulé, pour $z = L$.

2. En utilisant la condition d'enroulement reliant $\dot{z}$ à $\dot{\theta}$, exprimer dz en fonction de $d\theta$, et en déduire la relation différentielle

$$r\, dr = -\frac{\epsilon}{2\pi} dz.$$

3. Intégrer cette équation, en utilisant le fait qu'à la fin de la descente du yoyo, on a $r = r_0$ et $z = L$. En reprenant l'expression de l'énergie totale de la question 1.3, en déduire la vitesse verticale de chute sous la forme

$$\dot{z} = \sqrt{2gz}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{r_0^2 + \frac{\epsilon}{\pi}(L-z)}\right]^{-1/2}. \tag{2}$$

4. Comparer la vitesse initiale (pour $z = 0$) et la vitesse finale (pour $z = L$) avec celles du yoyo avec un fil d'épaisseur nulle. Comment l'épaisseur non nulle du fil change-t-elle la vitesse au cours de la descente, pour $0 < z < L$? Représenter qualitativement sur un même graphique l'allure de la vitesse en fonction de z pour $\epsilon = 0$ et $\epsilon \neq 0$.

5. On ne sait pas intégrer l'équation (2) pour calculer le temps de chute lorsque $\epsilon \neq 0$. On peut cependant faire un calcul approximatif, en remplaçant dans le crochet la hauteur instantanée z par la hauteur moyenne $z = L/2$. Que vaudrait dans ce cas le temps de chute T'_c, avec une épaisseur de fil $\epsilon = 0.5$ mm ? Quelle épaisseur de fil permet la chute la plus lente possible ?