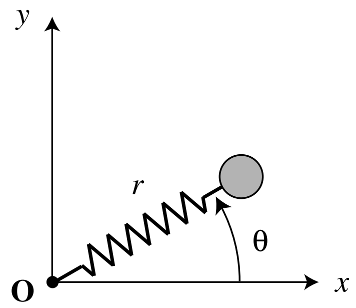
Devoir 1 de Mécanique

Pour le mercredi 29 octobre 2003

Exercice 1 : L'oscillateur tournant libre

Une bille de masse m, considérée comme ponctuelle, est fixée à l'extrémité d'un ressort de longueur à vide l_0 et de coefficient de raideur k. On repère la position de cette bille par sa distance r au point O et par l'angle θ qu'elle fait avec l'axe Ox. La bille est astreinte à rester dans le plan horizontal (x, y), et son poids (selon z) n'intervient donc pas.



1. Calculer le moment cinétique $\vec{J_0}$ de la bille par rapport à O, et montrer qu'il est constant.

2. Montrer que l'énergie mécanique de ce système peut s'écrire sous la forme
$$E_0 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r),$$
où l'on exprimera l'énergie potentielle effective $V_{\text{eff}}(r)$ en fonction de J_0, m, k, l_0 et r. A-t-on conservation de l'énergie mécanique dans ce problème ? Tracer l'allure de $V_{\text{eff}}(r)$, et préciser graphiquement la distance d'équilibre r_{eq} et sa stabilité.

3. On s'intéresse aux trajectoires lorsque la bille est envoyée d'une distance initiale r_i ($\theta_i = 0$), avec une vitesse initiale v_i perpendiculaire à l'axe du ressort. Calculer le moment cinétique J_0 en fontion de m, v_i et r_i. Montrer que l'équation du mouvement peut s'écrire
$$\ddot{r} = \frac{r_i^2 v_i^2}{r^3} - \omega_0^2(r - l_0), \quad (1)$$
où l'on a introduit la pulsation propre ω_0.

4. On se place ici dans l'approximation d'un ressort de longueur à vide nulle, $l_0 = 0$. A partir du Principe Fondamental de la Dynamique projeté dans le repère cartésien $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$, montrer que chaque composante (x, y) du vecteur position $\vec{r}(t)$ constitue un oscillateur harmonique indépendant. En déduire que la trajectoire est une ellipse de centre O, dont on déterminera la valeur des demi-axes a et b en fonction de ω_0 et des conditions initiales (r_i, v_i).

5. Toujours pour $l_0 = 0$, exprimer l'énergie potentielle effective $V_{\text{eff}}(r)$ en fonction uniquement de k, a, b et r, ainsi que l'énergie totale E_0 en fonction de k, a et b uniquement. Montrer que l'on peut exprimer le rayon d'équilibre r_{eq} en fonction de a et b uniquement. Tracer $V_{\text{eff}}(r)$, et indiquer graphiquement le domaine de distance r accessible à la bille pour une énergie E_0 donnée. Montrer que les bornes de ce domaine correspondent aux demi-axes a et b de l'ellipse.

6. On reprend l'équation générale du mouvement (1), sans faire l'approximation $l_0 = 0$. On se place dans l'approximation des faibles oscillations autour de la position d'équilibre r_{eq}, et on pose $r(t) = r_{eq} + \epsilon(t)$, avec $\epsilon(t) \ll r_{eq}$.

   Linéariser l'équation du mouvement par rapport à ϵ/r_{eq}, et montrer que l'équation différentielle pour ϵ se ramène à :
$$\ddot{\epsilon} + \omega^2 \epsilon = 0,$$
   où l'on identifiera ω en fonction de ω_0, l_0 et r_{eq}.

7. Intégrer cette équation, et tracer l'allure des trajectoires pour des conditions initiales $(r_i = l_0, v_i)$ avec $v_i \ll \omega_0 l_0$.

Exercice 2 : L'oscillateur tournant forcé

On considère le même système que précédemment, mais cette fois-ci la vitesse angulaire de rotation de la bille autour de O est imposée par l'extérieur : $\theta = \Omega t$, avec $\Omega = \text{cste}$. On admet que le ressort reste rigide selon son axe, c'est-à-dire qu'il ne peut pas se courber latéralement. On se place dans cet exercice dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$ lié à l'axe du ressort.

1. Faire le bilan des forces agissant sur la bille dans $\mathcal{R}'$, et écrire le Principe Fondamental de la Dynamique selon $\vec{e}_r$ dans ce référentiel sous la forme
$$m\ddot{r} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{dr},$$
   où l'on explicitera l'énergie potentielle effective $V_{\text{eff}}(r)$ (différente de celle de l'exercice précédent). Tracer l'allure de $V_{\text{eff}}(r)$ dans les cas $\Omega < \omega_0$, $\Omega = \omega_0$ et $\Omega > \omega_0$, où ω_0 est la pulsation propre du ressort en l'absence de rotation.

2. Déterminer la position d'équilibre de la bille r_{eq}, lorsqu'il y en a une, en fonction de l_0, ω_0 et Ω, et discuter sa stabilité. Donner l'allure de la courbe r_{eq} en fonction de Ω.

3. Montrer que la distance r vérifie l'équation différentielle :
$$\ddot{r} + (\omega_0^2 - \Omega^2) r = \omega_0^2 l_0.$$
   Pour de faibles vitesses angulaires Ω, montrer que la bille oscille autour de sa position d'équilibre r_{eq} avec une pulsation ω que l'on déterminera. Tracer l'allure de la trajectoire de la bille dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, dans le cas $\Omega = \omega_0/3$.

4. Déterminer la loi $r(t)$ pour $\Omega = \omega_0$ et $\Omega > \omega_0$ lorsque la bille est lâchée à $r(0) = l_0$ sans vitesse initiale dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Tracer l'allure de la trajectoire de la bille dans le référentiel du laboratoire dans ces deux cas.

5. On se replace dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. Le moment cinétique et l'énergie mécanique de la bille sont-ils conservés ? Expliquer qualitativement pourquoi, et comparer avec le cas de l'exercice 1.