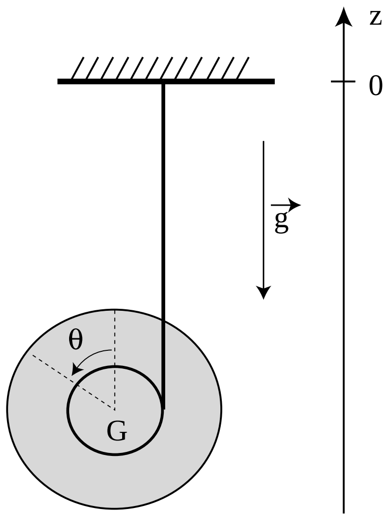
Licence de mécanique, Paris XI **Année universitaire 2002/03**

Devoir 1 de Mécanique

Pour le mercredi 30 octobre 2002

Exercice 1 : Retour sur le yo-yo



On lâche un yoyo, de masse m et de moment d'inertie I, dont l'extrémité du fil est fixe. Le fil (que l'on suppose toujours vertical) s'enroule autour du moyeu de rayon R. On repère le yoyo par l'altitude z de son centre de masse G.

a) A partir du principe de la dynamique, exprimer la tension $\vec{T}$ exercée par le fil sur le yoyo.

b) En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à G, écrire l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.

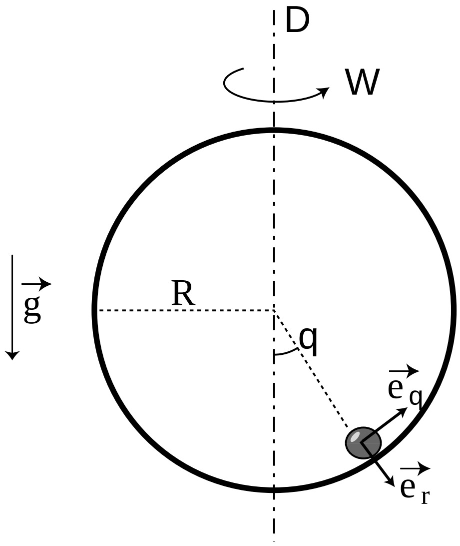
c) Montrer que le mouvement est uniformément accéléré, et exprimer l'accélération apparente g' en fonction de g et du rapport I/mR^2. En déduire la valeur de ce rapport si le yo-yo chute de 1 m en 3,5 s.

d) Décrire qualitativement le mouvement si l'épaisseur du fil conduit à une augmentation du rayon du moyeu au fur et à mesure de l'enroulement.

Exercice 2 : le pendule tournant

Une bille de masse m est placée dans un rail circulaire de rayon R dans le plan vertical, où elle peut glisser sans frottement. On note θ l'angle que fait la bille avec la verticale. Ce rail tourne autour d'un axe vertical Δ passant par le centre à une vitesse angulaire constante Ω fixée par l'expérimentateur.

a) On se place dans un premier temps en l'absence de rotation du rail ($\Omega = 0$). Le système est-il holonôme, rhéonôme, scléronôme ? Donner l'expression pour l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V. En déduire le lagrangien et l'équation différentielle régissant l'angle θ.



b) Pour résoudre cette équation, on se place dans le cas d'un angle θ très petit. On peut alors faire un développement limité autour de $\theta \simeq 0$: $\sin\theta \simeq \theta + \dots$ Identifier la pulsation propre ω_0 de l'oscillation. Résoudre dans ce cas l'équation du mouvement, si on lâche la bille sans vitesse initiale d'un angle θ_0.

c) On met maintenant le rail en rotation à vitesse angulaire constante Ω. Le système est-il holonôme, rhéonôme, scléronôme ? Rappeler ce qu'est un déplacement virtuel et le principe de d'Alembert. On notera $\vec{F}^{(a)}$ les forces autres que celles de contrainte, et par $\vec{\gamma}$ l'accélération (dans le référenciel du laboratoire). En déduire la relation que satisfait θ en un point d'équilibre "dynamique", c'est-à-dire quand $\theta(t) = \theta_{eq}\ \forall t$. (N.B.: pour cela, il vous faut déterminer l'accélération de la bille dont le mouvement est circulaire uniforme.) Trouver intuitivement, sans calcul, les angles d'équilibre pour Ω très faible et Ω très élevé.

d) Résoudre la relation dérivée ci dessus pour les différents angles d'équilibre de la bille θ_{eq}. Donner l'allure de la courbe $\theta_{eq} = f(\Omega)$.

e) On s'interesse à la transition à $\Omega = \omega_0$ entre l'angle d'équilibre $\theta_{eq} = 0$ (pour $\Omega < \omega_0$) et $\theta_{eq} \neq 0$ (pour $\Omega > \omega_0$). Pour une rotation Ω légèrement supérieure à la pulsation propre ω_0, on pourra poser $\Delta\omega = \Omega - \omega_0$. On a dans ce cas $\theta_{eq} \simeq 0$. Montrer à l'aide d'un développement limité de la relation $\theta_{eq} = f(\Omega)$ que l'on peut écrire
$$\theta_{eq} \sim \sqrt{\Delta\omega}.$$

f) Dans les questions qui suivent, on considère les oscillations autour des points d'équilibre dynamique. Il faut donc les équations du mouvement. Plutôt que de partir du principe de D'Alembert qui exige l'expression de l'accélération, utilisons le formalisme de Lagrange. Donner l'expression de l'énergie cinétique T et du lagrangien. En déduire l'équation différentielle régissant l'angle θ.

g) Étudier, en fonction de Ω, la stabilité du point d'équilibre $\theta_{eq} = 0$. (On linéarisera l'équation du mouvement autour de $\theta = 0$.)

h) Même question pour le point d'équilibre dynamique $\theta_{eq} \neq 0$. (On linéarisera l'équation du mouvement autour de $\theta = \theta_{eq}$.)