Licence de mécanique, Paris XI **Année universitaire 2001/02**

Devoir 1 de Mécanique

Pour le jeudi 20 décembre 2001

Temps d'approche à un point d'équilibre instable

Un corps ponctuel de masse m et de coordonnée cartésienne $x(t)$ se déplace sur l'axe des x. La force $f(x) = -dV/dr$ est conservative, et on notera l'énergie mécanique par E où

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + V(x) \ .$$

Le lieu des points accessibles au mouvement satisfont $V(x) \leq E$ ce qui se représente facilement graphiquement. On suppose que l'origine ($x = 0$) est un point d'équilibre *instable*.

1) Montrer que $dV/dx = 0$ en $x = 0$ et trouver le signe de d^2V/dx^2 en ce point (si cette dérivée seconde existe).

2) On prend pour conditions initiales $x < 0$ et la vitesse $dx/dt > 0$ d'intensité telle que $E = V(0)$. À partir de la conservation de E, écrire l'équation reliant dx à dt.

3) On suppose que $V(x) = -x^2$. En intégrant l'équation différentielle de la question précédente, trouver x en fonction du temps. Commentaire?

4) On considère V dans le voisinage du point $x = 0$; soit γ le nombre réel tel que $V(x) \approx -|x|^\gamma$ pour x très petit. Pour $\gamma < 2$, le corps atteint l'origine en un temps fini! Démontrer ce résultat et donner la loi pour x en fonction de t dans cette approximation. En quoi peut-on dire que la condition $\gamma < 2$ est pathologique et irréaliste?

5) Maintenant, on considère qu'on a en fait un corps de coordonnées polaires $r(t), \theta(t)$ en présence d'une force centrale. En utilisant la conservation du moment cinétique, on peut déterminer le mouvement en r via une correspondance avec un système unidimensionnel. Dans le contexte ci-dessus, on considérera que x doit être identifié avec $r - r_0$, r_0 étant une distance particulière non nulle. Dans le cas $\gamma = 2$, dessiner l'orbite dans le plan qu'effectue ce corps.

Manipulation du Lagrangien

Après réduction à un corps, un système à 2 corps est décrit par le vecteur allant du corps 1 au corps 2; ce vecteur a pour coordonnées polaires $(r(t), \theta(t))$. Le Lagrangien donnant les équation du mouvement pour ces coordonnées est

$$L(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2] - V(r) \ .$$

Ce système conserve le moment cinétique; algébriquement, cette quantité est

$$\ell = mr^2\dot{\theta} \ .$$

Cette conservation conduit à la relation $1/2\ m(r\dot{\theta})^2 = \ell^2/2mr^2$. On s'intéresse au mouvement en r. En cours, on est parti de l'énergie mécanique. Supposons qu'à la place on utilise la conservation de ℓ pour éliminer θ et $\dot{\theta}$ dans L. Cette élimination conduit au Lagrangien pour un système unidimensionnel effectif

$$L(r, \dot{r}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} - V(r) \ .$$

Comme $L = T - V$, le potentiel effectif est

$$V_{eff}(r) = -\frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r)$$

avec un signe moins devant le premier terme, ce qui est différent de l'expression utilisée en cours. Expliquer ce “paradoxe” et s'il y a effectivement une contradiction.