

Hydrodynamique physique

TD 1 : Ecoulements parallèles et quasi-parallèles

Exercice 1 : Nappe liquide sur un plan incliné

On considère l'écoulement permanent d'un fluide Newtonien incompressible et pesant sur un plan incliné. On suppose que la surface libre reste plane et parallèle au plan incliné.

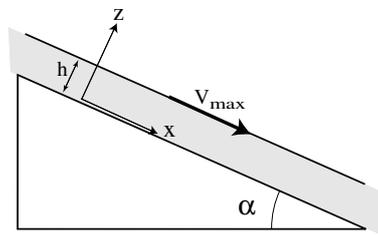


Figure 1: Ecoulement exactement parallèle sur un plan incliné.

- Déterminer la structure du champ de vitesses ainsi que ses conditions aux limites (en $z = 0$ et $z = h$). Intégrer l'équation de Navier-Stokes pour un tel champ de vitesse, et en déduire le profil de vitesse. Que vaut la force de frottement sur le plan ?
- Calculer le débit à travers une surface transverse à l'écoulement, et exprimer la vitesse moyenne du fluide \bar{v} en fonction de sa vitesse à la surface V_{max} .
- En multipliant scalairement l'équation de Navier-Stokes par \vec{v} , écrire un bilan de puissance par unité de volume sous la forme :

$$\frac{de_c}{dt} = \dot{w}_p - \dot{w}_f,$$

où $e_c = \rho v^2/2$ est l'énergie cinétique, $\dot{w}_p > 0$ la puissance injectée par pesanteur et $\dot{w}_f > 0$ la puissance dissipée par les forces de frottement. Calculer et discuter physiquement chacun de ces termes.

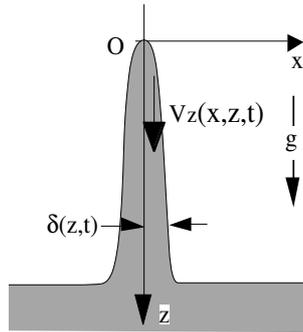
- Calculer la puissance globale dissipée \dot{W}_f sur une longueur Δx et une profondeur Δy , et montrer que l'on peut l'exprimer sous la forme

$$\dot{W}_f = \eta \Delta x \Delta y \int_0^h \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 dz.$$

Calculer l'élévation de température du fluide en une minute ($\rho = 1000 \text{ Kg.m}^{-3}$, $\eta = 10^{-3} \text{ Kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, $c_p = 4180 \text{ J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $h = 1 \text{ mm}$ et $\alpha = 45^\circ$).

Exercice 2 : Couche fluide entraînée par une lame sortant d'un fluide visqueux

Une lame se trouve initialement immergée dans un fluide visqueux, dont on abaisse brusquement le niveau. On admet que le drainage s'effectue sous le seul effet de la gravité g freinée par la viscosité η , et on néglige les effets de la tension de surface. On suppose de plus que $\partial\delta/\partial z \ll 1$, de telle sorte que l'on peut considérer l'écoulement comme localement parallèle (on effectue les calculs pour une longueur unité dans la direction perpendiculaire au plan de la figure suivant laquelle l'écoulement est supposé invariant). On note p_0 la pression atmosphérique à l'extérieur du film, et on suppose l'épaisseur du film et le profil de vitesse identiques sur les deux faces de la lame (on fera donc les calculs uniquement sur le film de fluide situé du côté $x > 0$).



- 1) a) Ecrire soigneusement les équations de mouvement et de conservation de la masse vérifiées par la vitesse $v_z(x, z, t)$ à l'intérieur du film dans les approximations d'écoulement quasiparallèle. On supposera par ailleurs que l'évolution de l'épaisseur du film est assez lente pour qu'on puisse supposer qu'à tout instant le profil de vitesse stationnaire $v_z(x, z)$ correspondant à l'épaisseur $\delta(z)$ a eu le temps de s'établir. Ce profil de vitesse évoluera ensuite lentement au cours du temps au fur et à mesure du drainage du film et des variations de $\delta(z)$. Quelles sont les conditions aux limites sur les parois et à la surface ?

- b) Montrer (en utilisant les résultats précédents) que le profil de vitesse $v_z(x)$ vérifie :

$$v_z = \frac{\rho g}{2\eta} x(2\delta - x). \quad (1)$$

- c) Démontrer soigneusement la relation suivante décrivant l'évolution (lente) de δ en écrivant la conservation de la masse dans une (demi) tranche de fluide perpendiculaire à la lame :

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{\rho g}{\eta} \delta^2 \frac{\partial\delta}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

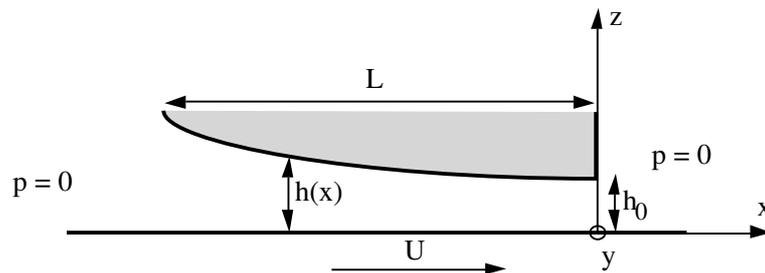
- d) Quel est le temps caractéristique τ_d d'établissement du profil de vitesse quasistationnaire sur l'épaisseur δ du film ? Pour que les hypothèses précédentes soient valables, il faut que le temps τ_v caractéristique d'évolution de l'épaisseur ($1/\tau_v \simeq 1/\delta \partial\delta/\partial t$) soit très supérieur à τ_d . Quelle inégalité doit vérifier τ_d pour que cette relation soit vérifiée ? (on notera L la distance caractéristique sur la quelle on a une variation notable de δ ($1/L \simeq 1/\delta \partial\delta/\partial z$). Quelle devra être la viscosité du fluide pour que cette condition soit vérifiée pour $\delta \simeq 2$ mm et $L \simeq 100$ mm ?

- 2) Démontrer que l'équation (2) admet des solutions du type $\delta = f(z/t)$. En supposant que c'est une solution de ce type qui est observée expérimentalement, montrer que $f(u) = A\sqrt{u}$ avec $u = z/t$. Etablir l'expression du coefficient A . Quel sera le profil géométrique du film ?
- 3) On suppose maintenant les caractéristiques suivantes pour le liquide : $\rho = 10^3$ kg/m³, $\eta = 1$ Pa.s. Calculer l'épaisseur de liquide restant à une distance $z = 20$ cm après des temps de 1 s, 10 s, 100 s, 10⁴ s ? Quel résultat obtiendrait-on pour $\eta = 0.01$ Pa.s ?

Hydrodynamique physique

TD 2 : Écoulements quasi-parallèles - lubrification

Exercice 1 : Écoulement de lubrification dans un "patin exponentiel"



On considère un patin glissant à vitesse $-U$ au-dessus d'un plan horizontal infini recouvert d'une fine pellicule d'huile. Dans le référentiel du patin, ce problème équivaut à étudier l'écoulement du fluide dans l'interstice entre le plan se déplaçant à la vitesse U et le patin fixe. L'épaisseur de l'interstice $h(x)$ varie lentement avec la coordonnée x (c'est-à-dire qu'on a $\partial h/\partial x \ll 1$). U est de l'ordre de 10 cm/s, h est de l'ordre de 0,1 mm, la longueur du patin L est de 10 cm. Le fluide est une huile de viscosité dynamique 200 mPa.s et de masse volumique 1 g/cm³.

1. a) Déterminer l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds associé à cet écoulement. La dynamique de l'écoulement est-elle gouvernée par l'inertie ou la viscosité ?
- b) On admettra que le champ de vitesse est pratiquement unidimensionnel, seule la composante u selon x est non nulle. Montrer que, dans ce cas, l'équation de Navier-Stokes se réduit à :

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3)$$

- c) En utilisant le fait que le gradient de pression varie très lentement avec x , déterminer le profil de vitesse dans l'interstice et montrer que le débit de fluide Q (par unité de longueur dans la direction y) est donné par :

$$Q = -\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{Uh}{2}. \quad (4)$$

2. a) La conservation du débit Q à travers toute section verticale impose qu'il existe une position x^* où s'annule le gradient de pression $\partial p/\partial x$. On note $h^* = h(x^*)$ l'épaisseur de l'interstice à cet endroit. Montrer que le gradient de pression et h sont reliés par :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 6\eta U \frac{h(x) - h^*}{h(x)^3}. \quad (5)$$

- b) La forme du patin est telle que l'épaisseur de l'interstice varie exponentiellement avec la coordonnée x :

$$h = h_0 e^{-\alpha x}, \quad \text{avec } x < 0, \quad (6)$$

avec $\alpha = 0,1 \text{ cm}^{-1}$, tel que la condition $\partial h/\partial x \ll 1$ reste toujours vérifiée. On suppose que la pression est la même sur la face d'entrée et sur la face de sortie du patin et que cette pression

est égale à zéro. Calculer la répartition de pression $p(x)$, avec les hypothèses précédentes, en fonction de h , U , x^* , α et h_0 .

c) Montrer que, si L est suffisamment grand, l'expression de $\Delta p(x)$ devient :

$$\Delta p(x) = \frac{3\eta U}{\alpha h_0^2} [e^{2\alpha x} - e^{3\alpha x}]. \quad (7)$$

Quelle est la condition pour que cette équation soit vérifiée, et quelle est alors la valeur de x^* ? La force totale sur le patin et la vitesse en un point donné dépendent-ils de L ? Expliquer ce résultat et tracer *qualitativement* la répartition de pression et le champ de vitesse dans l'interstice.

3. a) On note F_z la composante verticale de la force s'exerçant sur le patin et F_{xh} la composante horizontale. On note F_{x0} la composante horizontale de la force s'exerçant sur la plaque. Montrer que F_z (par unité de longueur dans la direction y) est telle que :

$$F_z = \frac{\eta U}{2\alpha^2 h_0^2} \quad (8)$$

et que les composantes horizontales (toujours par unité de longueur dans la direction y) sont respectivement égales à :

$$F_{x0} = -\frac{7}{4}\eta \frac{U}{\alpha h_0} \quad \text{et} \quad F_{xh} = \frac{1}{4}\eta \frac{U}{\alpha h_0}. \quad (9)$$

- b) Calculer numériquement F_z et F_{xh} pour les valeurs indiquées plus haut pour les différents paramètres. Le rapport F_z/F_x est-il petit ou grand devant 1 ? Indiquer qualitativement comment il faut choisir h_0 , α et L pour que la force de sustentation soit élevée et la force de traînée réduite.
- c) Serait-il possible de sustenter le patin si le sens de déplacement de la plaque était inversé ?
- d) Le fait que F_{x0} et F_{xh} ne soient pas égales en valeur absolue est-il une violation du principe de l'action et de la réaction ?

Exercice 2 : Etalement d'une goutte

On s'intéresse ici à la variation temporelle du rayon d'une goutte d'un liquide non volatil posée sur un substrat solide dans des conditions de mouillage total. A temps long, les effets de tension de surface deviennent négligeables et seuls les effets de gravité et de viscosité interviennent. On peut alors considérer la goutte comme plate dans sa partie centrale, et la courbure localisée sur les bords (figure 2).

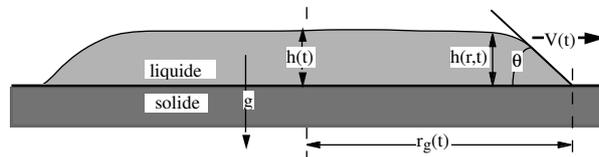


Figure 2: Vue schématique d'une goutte de grand rayon s'étalant sous l'effet de la gravité.

1. On note $V(r)$ la vitesse radiale moyenne dans l'épaisseur de la goutte à travers un cylindre de rayon r . Pour $r = r_g$, on a $V(r_g) = dr_g/dt$ la vitesse d'étalement de la goutte. En raisonnant sur la conservation de la masse, exprimer la vitesse moyenne $V(r)$ en fonction de la vitesse d'étalement. En utilisant l'hypothèse de lubrification, écrire le profil de vitesse radiale $u_r(r, z)$ en fonction de la vitesse à la surface supérieure notée $V_s(r)$.

- Calculer la dissipation d'énergie dE_v/dt due aux frottements visqueux dans la partie centrale de la goutte. On admet que la dissipation visqueuse près de la ligne de contact est négligeable.
- En régime quasistationnaire, la variation d'énergie potentielle dE_p/dt vient compenser la dissipation visqueuse. En intégrant l'équation différentielle ainsi obtenue, en déduire que le rayon de la goutte suit une loi

$$r_g(t) \sim t^{1/8}. \quad (10)$$

Des mesures expérimentales de $r_g(t)$ sont représentées sur la figure 3. Comment interprétez-vous les résultats à temps court ?

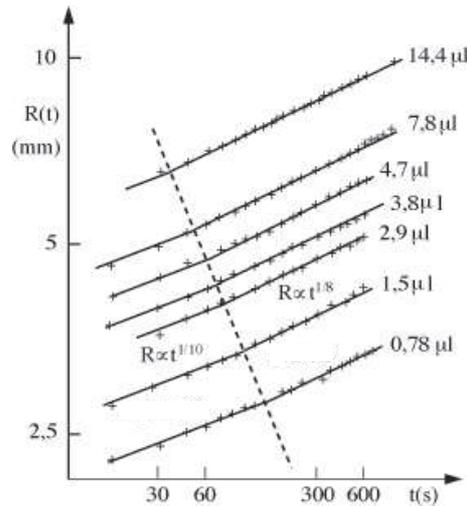


Figure 3: Variation temporelle (en coordonnées log-log) du rayon $r_g(t)$ pour un ensemble de gouttes d'huile silicone ($\eta = 0,02$ Pa.s, $\gamma = 20$ mN.m), de volume variable, s'étalant sur des plaques planes de verre hydrophile. Les lignes pointillées en bas de la figure correspondent à des variations en loi de puissance d'exposants $1/8$ et $1/10$. (Document A.M. Cazabat, M. Cohen Stuart).

Exercice 3 : La cuillère dans le miel

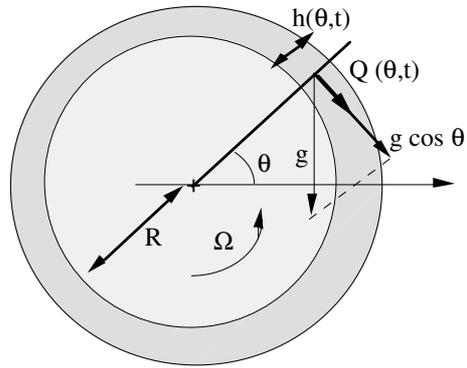
On fait tourner un cylindre à une vitesse angulaire Ω avec une couche de fluide visqueux (viscosité cinématique ν et dynamique η) placée dessus. On cherche à étudier la condition pour qu'on atteigne un régime stationnaire où l'épaisseur est constante à un angle θ donné par rapport à l'horizontale. On se placera pour résoudre le problème dans le cas où l'épaisseur $h(\theta, t)$ est de toute façon très faible par rapport au rayon R du cylindre. On note g l'accélération de la pesanteur et on se place dans l'approximation de lubrification (on néglige les effets de la force centrifuge et de la tension de surface).

- Déterminer le champ de pression et de vitesse dans le fluide (on pourra poser la coordonnée $y = r - R$).
- En écrivant les conditions de conservation de la masse et le débit $Q(\theta, t)$ dans une section fixe, montrer que dans le régime général instationnaire on a :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{g}{3\nu R} \frac{\partial}{\partial \theta} (h^3 \cos \theta).$$

- Que devient cette équation dans le cas d'un écoulement stationnaire ? Montrer que l'épaisseur $h(\theta)$ vérifie la relation $F(h(\theta)) = 0$, où l'on pose :

$$F(h) = \frac{g}{3\nu} h^3 \cos \theta - \Omega R h + Q.$$



- 4) Quelle condition doit vérifier $F(h)$ pour avoir un film continu en régime stationnaire ? Analyser graphiquement les solutions en traçant $F(h)$ pour des angles remarquables ($\theta = 0, \pi, \pm\pi/2$). Montrer que l'on aura une solution $h(\theta) > 0$ continue si :

$$Q < \frac{2}{3} \Omega R \sqrt{\frac{\Omega R \nu}{g}}$$

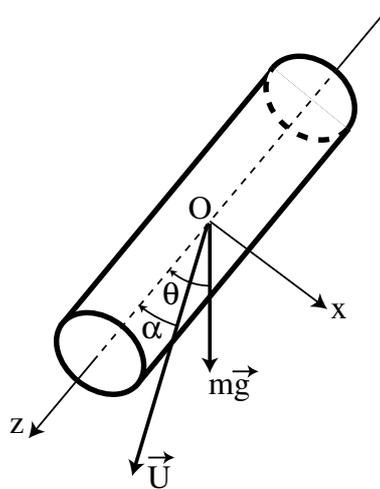
Exprimer ce résultat par une condition sur l'épaisseur $h_0 = h(\theta = \pi/2)$. Retrouver ce résultat qualitativement, en comparant la vitesse d'advection ΩR à la vitesse acquise sous l'effet de la gravité pendant le temps de diffusion visqueuse.

- 5) En approximant l'épaisseur de fluide comme constante $h(\theta) \simeq h(\pi/2)$, estimer la masse maximale de fluide (par unité de longueur du cylindre) qu'il est possible de faire tourner autour du cylindre.

Hydrodynamique physique

TD 3 : Écoulements à petit nombre de Reynolds

Exercice 1 : Déviation de la chute d'un cylindre



On cherche à déterminer la trajectoire d'un cylindre incliné tombant dans un fluide visqueux sous l'action de la pesanteur. On note θ l'angle du cylindre avec la verticale. On définit la force de frottement et le couple de frottement (calculé par rapport au centre de symétrie) exercés par le fluide sur le cylindre :

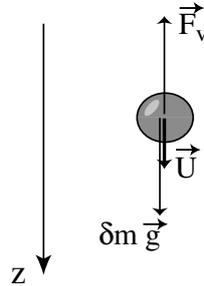
$$\begin{cases} F_i = -\eta(A_{ij}U_j + B_{ij}\Omega_j) \\ G_i = -\eta(C_{ij}U_j + D_{ij}\Omega_j) \end{cases} \quad (11)$$

1. En tenant compte des symétries de ce problème, quelles relations vérifient ces tenseurs \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} ? En définissant les coefficients de frottement perpendiculaire $\lambda_{\perp} = A_{xx}$ et parallèle $\lambda_{\parallel} = A_{zz}$ à l'axe Oz , exprimez les tenseurs \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{C} . A-t-on besoin de connaître \mathcal{D} ?
2. On admet que, pour un cylindre suffisamment long, les deux coefficients de frottement vérifient :

$$\lambda_{\perp} = 2 \lambda_{\parallel}.$$

En déduire l'angle de déviation de la chute $\theta - \alpha$ en fonction de l'inclinaison θ du cylindre (α étant l'angle entre la trajectoire et l'axe du cylindre, voir la figure). Quelle est la déviation maximale ?

Exercice 2 : Sédimentation



On s'intéresse à la sédimentation de petits grains de silice dans l'eau ($\rho_e = 10^3 \text{ Kg.m}^{-3}$, $\eta \simeq 10^{-3} \text{ Pa.s}$) sous l'effet de la gravité. Les grains sont assimilés à des petites sphères, de rayon $R = 1 \mu\text{m}$ et de densité $\rho_s = 2.5 \cdot 10^3 \text{ Kg.m}^{-3}$. Lors de leur chute, ces sphères sont soumises à la force de frottement de Stokes,

$$\vec{F}_v = -6\pi\eta R \vec{v}.$$

On note $\delta\rho = \rho_s - \rho_e$ la différence de densité silice – eau.

1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v(t)$ de la bille. Calculer la vitesse limite v_{lim} atteinte par la bille en régime stationnaire, et tracer l'allure de la vitesse $v(t)$. Vérifier que le nombre de Reynolds de cet écoulement est bien compatible avec la force de Stokes utilisée dans ce calcul.
2. Estimer le temps τ_v nécessaire pour atteindre la vitesse limite. Comparer ce temps au temps caractéristique de diffusion visqueuse sur une distance de l'ordre de R .
3. Calculer le temps d'advection τ_a mis par la sphère pour parcourir une distance égale à son rayon, et montrer que l'on peut considérer que la sphère atteint instantanément son régime de vitesse limite. Quelle devrait être la taille des grains pour qu'il en soit autrement ?
4. A l'échelle des grains il devient nécessaire de tenir compte des effets de l'agitation thermique. Celle-ci donne lieu à une diffusion brownienne des grains en suspension, dont le coefficient de diffusion est donné par :

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta R}$$

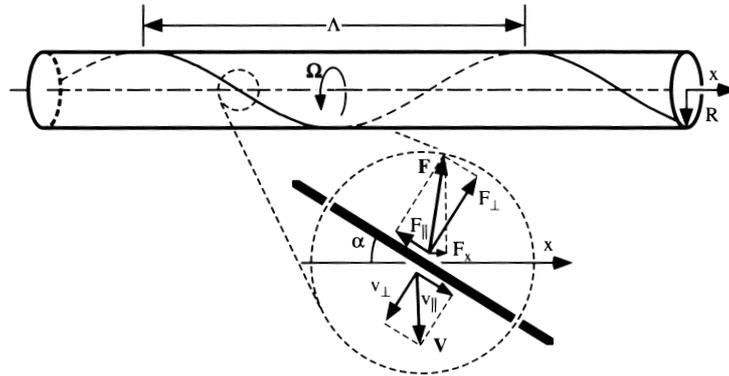
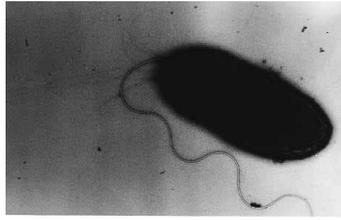
où $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ est la constante de Boltzman. Calculer le temps τ_d nécessaire à la particule pour diffuser sur une distance de l'ordre de son rayon, et le comparer au temps d'advection τ_a . En déduire qualitativement la forme du tas obtenu en laissant sédimenter un grand nombre de grains sur une hauteur de 1 m.

Exercice 3 : Propulsion d'une bactérie

Afin de se déplacer, certains petits organismes unicellulaires disposent d'un flagelle, une sorte de filament hélicoïdal de 15 nm d'épaisseur en rotation rapide (jusqu'à 1000 tour/s). La figure ci-dessous montre l'exemple de la bactérie *E.Coli*, constituée d'un corps central d'environ $2 \mu\text{m}$. La rotation du flagelle est assurée par un petit moteur moléculaire d'environ 25 nm, situé dans l'épaisseur de la membrane cellulaire.

Afin de modéliser la propulsion d'un tel organisme, on s'intéresse au couplage entre translation et rotation lors du déplacement d'une hélice dans un fluide visqueux (on ne considère pas ici le frottement associé au déplacement du corps central). On note R le rayon de l'hélice, et Λ son pas ; on choisit ici $\Lambda \gg R$ pour simplifier. On impose une rotation Ω autour de l'axe Ox , et on cherche à déterminer la force et le couple de frottement résultants selon cet axe.

- a) Estimer le nombre de Reynolds de cet écoulement. Quelle(s) sont les composantes des tenseurs \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{D} à calculer pour décrire l'influence de la rotation selon Ox ?



- b) On approxime localement chaque élément de longueur de l'hélice comme un petit segment cylindrique rectiligne faisant un angle α avec l'axe Ox . En reprenant les résultats de l'exercice 1 (TD 3), calculer les composantes dF_{\parallel} et dF_{\perp} de la force de frottement induite par la vitesse azimutale $V = \Omega R$ du petit élément de longueur. (On rappelle $d\lambda_{\perp} = 2d\lambda_{\parallel}$ pour un cylindre de grand rapport d'aspect). En déduire les composantes des tenseurs B_{xx} et D_{xx} .
- c) En supposant que la puissance $P = \vec{\Omega} \cdot \vec{G}$ fournie par le moteur moléculaire contribue avec une efficacité de l'ordre de 1 % au déplacement de la bactérie, calculer l'ordre de grandeur de la vitesse atteinte.

Hydrodynamique physique

TD 4 : Milieux poreux

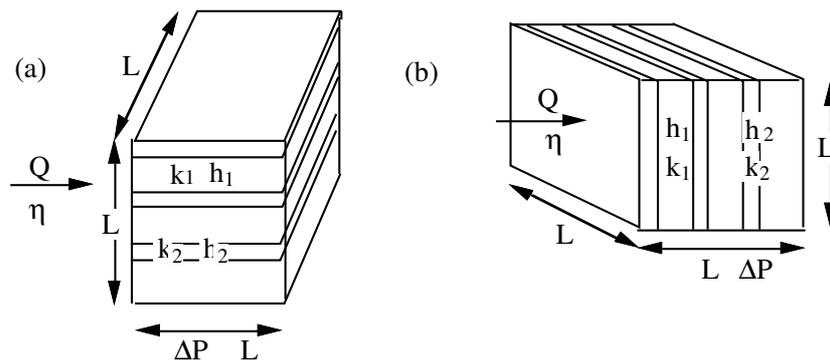
Exercice 1 : Poreux en couches

Dans ce problème, on s'intéresse aux milieux poreux composites comprenant des parties de perméabilité k_1 et des parties de perméabilité k_2 . On suppose tous les pores du milieu complètement saturés d'un même fluide de viscosité η .

- On écrit la loi de Darcy, en l'absence de gravité, sous la forme :

$$\vec{V}_s = -\frac{k}{\eta} \vec{\nabla} p,$$

où p est la pression à l'intérieur du milieu. Quelle est la signification physique de \vec{V}_s ? Comment cette vitesse est-elle reliée à la vitesse du fluide dans les pores ? Exprimer la constante k dans le cas d'un milieu poreux isotrope de porosité ϕ , constitué d'un ensemble de capillaires de diamètre d .



- On suppose le poreux formé d'un empilement alterné de couches poreuses parallèles de perméabilité k_1 et d'épaisseur h_1 et de couches de perméabilité k_2 et d'épaisseur h_2 . On prend un empilement de contour cubique avec une des directions de faces parallèles aux couches et de côté $L \gg h_1$ et $\gg h_2$.

- On suppose qu'on applique une différence ΔP de pression parallèle à un des côtés du cube et parallèle aux couches (cas a). Calculer le débit volumique à travers les faces perpendiculaires à ce côté, et montrer que la perméabilité équivalente $k_{//}$ du milieu pour un écoulement dans cette direction vérifie

$$k_{//} = \frac{k_1 h_1 + k_2 h_2}{h_1 + h_2}.$$

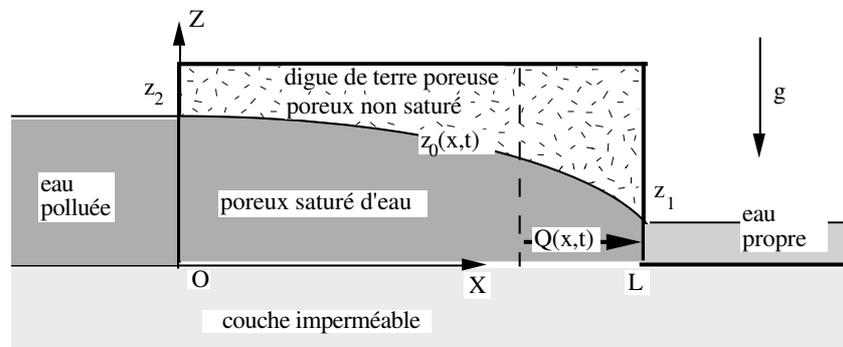
- On suppose maintenant qu'on applique une différence de pression ΔP dans la direction perpendiculaire aux couches (cas b). Calculer le débit volumique global à travers les deux faces parallèles aux couches et montrer que la perméabilité k_{\perp} équivalente du milieu correspondant à ce type d'écoulement vérifie

$$k_{\perp} = \frac{h_1 + h_2}{h_1/k_1 + h_2/k_2}.$$

- Que deviennent les perméabilités $k_{//}$ et k_{\perp} lorsqu'une des perméabilités k_1 ou k_2 devient nulle ou infinie ?

Exercice 2 : Digue poreuse

On considère un étang pollué séparé d'une étendue d'eau propre par une digue qu'on supposera de section rectangulaire (voir figure), de largeur L et de grande longueur (on supposera qu'on ne fait pas intervenir la coordonnée y et que le problème est bidimensionnel). La digue est (malheureusement) simplement formée de terre poreuse et on va chercher à calculer le débit d'eau polluée vers l'extérieur lorsque le niveau d'eau polluée z_2 est plus élevé que le niveau extérieur z_1 . Les deux surfaces d'eau libre sont de très grande étendue et constantes dans le temps. On néglige les effets de tension superficielle. On suppose qu'on a une séparation nette à l'intérieur de la digue entre la zone occupée par de l'eau (polluée ou non) et la zone non saturée : on ne tient pas compte de l'eau présente (sous forme de film ou de gouttelettes isolées) au dessus de ce niveau. On appelle k et a la perméabilité de la digue, ρ_0 la densité de l'eau et η_0 sa viscosité dynamique (on suppose que la densité et la viscosité de l'eau polluée sont les mêmes que celles de l'eau propre et la viscosité cinématique sera notée $\nu_0 = \eta_0/\rho_0$). Soit $z_0(x, t)$ le niveau de la nappe d'eau à l'intérieur de la digue et on suppose que la pente $\partial z/\partial x$ est $\ll 1$. On suppose enfin qu'il n'y a pas de discontinuité de niveau entre l'intérieur et l'extérieur du massif dans les faces $x = 0$ et $x = L$. On note $Q(x, t)$ le débit à travers une section $x = \text{cte}$ (compté par unité de longueur dans la direction Oy).



1. Quelle est la condition aux limites sur la pression à la surface $z = z_0(x, t)$ de la nappe phréatique ? On appelle p_0 la pression atmosphérique au dessus du massif. Établir la relation entre les composantes du gradient de pression et $z(x, t)$ et en déduire l'équation :

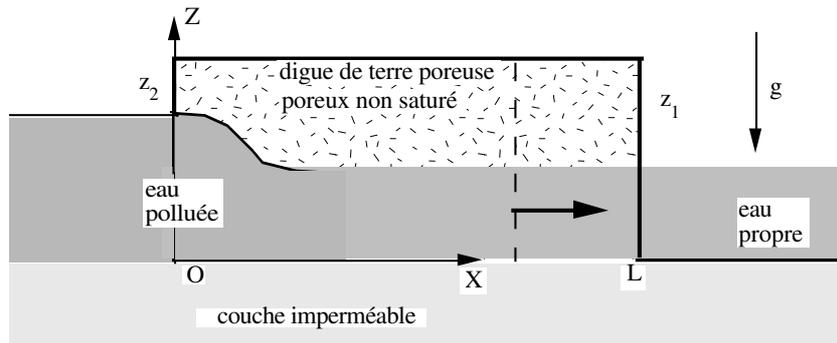
$$Q(x, t) = -\frac{kg}{\nu_0} z_0 \frac{\partial z_0}{\partial x}. \quad (12)$$

2. On se place dans le cas où on a atteint un régime stationnaire d'écoulement. Que peut-on dire de $\partial Q/\partial x$? En déduire que le profil de la surface vérifie :

$$\frac{z_2^2 - z_0^2}{z_2^2 - z_1^2} = \frac{x}{L} \quad (13)$$

et établir l'expression du débit $Q(x)$. Tracer l'allure de ce profil, et proposez une interprétation physique.

3. On suppose que la digue est formée de grains qu'on assimile à des sphères empilées de diamètre $50 \mu\text{m}$ et que la porosité ϕ de l'empilement est de 40 %. En déduire la perméabilité de la digue à partir de la formule de Carman Kozeny. Calculer alors le débit volumique de fluide par unité de longueur de digue en prenant $z_2 = 2 \text{ m}$, $z_1 = 1 \text{ m}$, $L = 10 \text{ m}$ et $\eta_0 = 10^{-3} \text{ Pa.s}$.
4. On cherche à savoir si l'approximation consistant à supposer que les effets de capillarité sont négligeables est justifiée. Pour cela on cherche à évaluer l'ascension capillaire dans des tubes verticaux d'un diamètre de l'ordre de celui des pores du sol considéré (typiquement $20 \mu\text{m}$) : Avec une tension superficielle de l'ordre de 60 mN/m , quel sera l'ordre de grandeur de la hauteur d'ascension dans de tels tubes ?



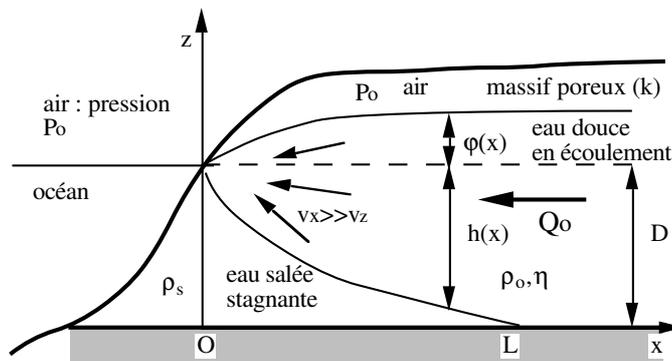
5. On cherche enfin à estimer combien de temps il faudra au liquide pollué pour pénétrer dans la digue si l'on part d'une situation où le niveau de liquide dans la digue était égal à z_1 et qu'on établis brusquement le niveau extérieur à la valeur z_2 .

- a) Quelle est la relation entre le gradient $\partial Q/\partial x$ et la variation de la hauteur $\partial z_0/\partial t$ pour la même section ? En déduire que z_0 vérifie :

$$\frac{kg}{2\nu} \frac{\partial^2 z^2}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial t} \quad (14)$$

- b) A quel type d'équation cette relation est-elle analogue dans le cas où les variations de hauteur mesurées sont faibles par rapport à la hauteur initiale ? Quel type de solution a-t-elle ?
 c) Avec les valeurs numériques précédentes, quel sera le temps caractéristique nécessaire à l'eau polluée pour pénétrer sur une distance de l'ordre de 5 m dans la digue ?

L'aquifère côtier



Les précipitations sur une côte perméable conduisent parfois à la formation d'une nappe phréatique d'eau douce s'écoulant vers la mer et stratifiée avec une nappe d'eau salée. Cette nappe phréatique ne remonte en général pas jusqu'à la surface du sol.

1. Comment varie la pression avec z dans les deux nappes ? En déduire la relation :

$$\frac{\phi(x)}{h(x)} = \frac{\delta \rho}{\rho_0}$$

Application : $\rho_0 = 1 \text{ g/cm}^3$, $\rho_s = 1,025 \text{ g/cm}^3$.

2. On suppose comme dans l'exercice précédent que les lignes de courant font un angle faible avec l'horizontale dans l'eau douce et que l'eau salée est au repos. Montrer que la composante v_x de la vitesse vérifie :

$$v_x = -\frac{k\rho g}{\eta} \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

En déduire que le débit total d'eau dans l'aquifère vérifie :

$$Q_0 x = \frac{k\rho g}{2\eta} \left(1 + \frac{\rho}{\delta\rho}\right) \phi^2(x).$$

Quelle est la forme des profils $h(x)$ et $\phi(x)$?

3. Estimer la longueur d'intrusion L de l'eau de mer en fonction du débit Q_0 et de la profondeur D de l'aquifère. Quel problème peut poser l'exploitation de la nappe par des puits forés dans la nappe d'eau douce lorsque le débit Q_0 diminue ?

Ce modèle représente la théorie de Ghyben-Herzberg (1901).

Hydrodynamique physique

TD 5 : Fluides non newtoniens

Exercice 1 : Écoulement de boue de forage

Dans un forage pétrolier, les débris de roche produits par la pénétration du trépan en rotation sont remontés à la surface au moyen d'un écoulement ascendant de boue (fig. 4). Les boues de forage utilisées sont des suspensions concentrées de particules solides (argiles). Cette boue doit être suffisamment fluide pour s'écouler facilement sous l'effet de la surpression $\partial p / \partial z > 0$ imposée dans le train de tiges central, mais aussi suffisamment visqueuse pour empêcher la retombée des débris dans la conduite annulaire lorsqu'on stoppe l'écoulement.

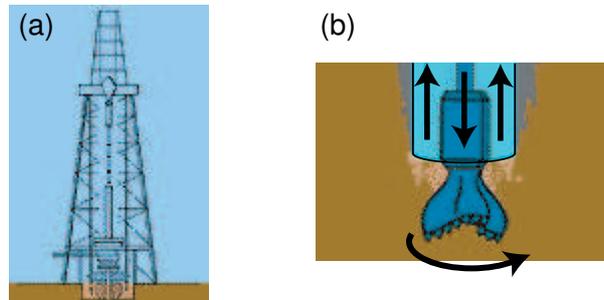


Figure 4: (a) : Puits de forage. (b) : trépan en rotation, avec injection centrale et remontée latérale de la boue de forage, entraînant les débris de roche vers la surface.

On peut considérer la boue comme un fluide de Bingham, présentant un seuil de contrainte σ_c en-dessous duquel le fluide ne s'écoule pas ($\dot{\gamma} = 0$), et au-dessus duquel la relation est linéaire comme pour un fluide newtonien ($\sigma = \sigma_c + D\dot{\gamma}$, avec $D > 0$). Nous ne considérons ici que le problème de l'écoulement stationnaire descendant dans le cylindre intérieur, de rayon R et de longueur L .

$$(\rho_{\text{roche}} = 2,5 \cdot 10^3 \text{ Kg.m}^{-3}, \rho_{\text{boue}} = 1,5 \cdot 10^3 \text{ Kg.m}^{-3}, \sigma_c = 9 \text{ Pa}).$$

1. Donner l'allure du rhéogramme (diagramme contrainte - taux de cisaillement) pour un tel fluide, comparé à d'autres types de fluides newtoniens ou non.
2. En écrivant l'équilibre des forces sur un élément de volume cylindrique, de rayon r et centré sur l'axe du tube, déterminer la contrainte tangentielle σ'_{rz} en fonction de r et de la contrainte à la paroi σ_R . Que vaut cette contrainte dans le cas d'un fluide newtonien ?
3. Déterminer graphiquement le profil de gradient de vitesse radial pour l'écoulement d'un fluide de Bingham. Montrer que la partie centrale, définie par $r < r_c$, s'écoule en bloc. Dessiner l'allure du profil de vitesse pour différents gradients de pression ; ce profil se rapproche-t-il de celui d'un fluide rhéoépaississant ou rhéofluidifiant ?
4. Calculer la pression minimale à imposer sur un train de tige de 1 km de hauteur et de 10 cm de rayon pour imposer un écoulement. Lorsque l'écoulement est stoppé, estimer la taille maximale que pourront avoir les débris de roche pour être maintenus dans la colonne de boue.

5. Montrer (par une intégration par partie) que le débit peut s'écrire

$$Q = \pi \int_{u_z(0)}^{u_z(R)} r^2 du.$$

En déduire, pour un fluide caractérisé par une loi $\dot{\gamma} = f(\sigma)$, le débit sous la forme

$$Q = \pi \frac{R^3}{\sigma_R^3} \int_0^{\sigma_R} \sigma^2 f(\sigma) d\sigma.$$

Que vaut $f(\sigma)$ dans le cas newtonien ? Retrouver alors l'expression usuelle du débit Q_p pour l'écoulement de Poiseuille cylindrique.

6. Montrer que le rapport des débits entre ce fluide de Bingham et un fluide newtonien de viscosité $\eta = D$ soumis au même gradient de pression peut s'écrire

$$\frac{Q}{Q_p} = 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_R} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_R} \right)^4.$$

Tracer l'allure de Q/Q_p en fonction de σ_R/σ_c (on pourra négliger le terme à la puissance 4 pour σ_R suffisamment grand).

Exercice 2 : Écoulement d'un fluide viscoélastique près d'un plan oscillant

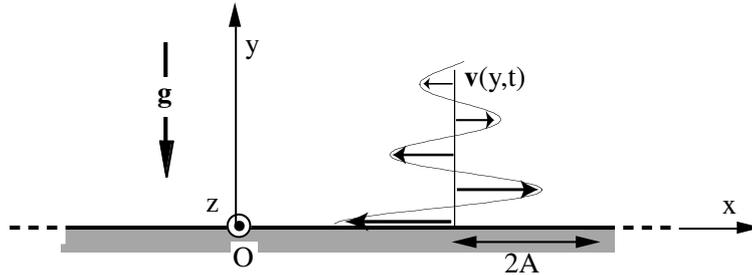


Figure 5: Profil instantané de vitesse $v_x(y, t)$ dû à l'oscillation du plan horizontal.

Un fluide repose sur un plan horizontal xOz , oscillant parallèlement à lui-même dans la direction Ox avec une pulsation ω et une amplitude A . On considère dans un premier temps la façon dont l'onde de cisaillement est amortie dans le cas d'un fluide newtonien.

1. Montrer que le champ instantané de vitesse vérifie l'équation

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}.$$

2. Les conditions aux limites sur le plan imposent que le champ oscille à même fréquence, et l'on pose :

$$v_x(y, t) = f(y)e^{i\omega t}$$

(où le champ de vitesse physique est la partie réelle de v_x). Montrer que

$$v_x(y, t) = \omega A e^{-ky} \cos(\omega t - ky).$$

3. Déterminer la profondeur de pénétration δ , distance typique sur laquelle l'amplitude de l'onde de cisaillement est amortie. Calculer cette profondeur dans le cas d'une onde acoustique de cisaillement émise dans une huile visqueuse ($f = 400$ Hz, $\nu = 10^{-4}$ m/s²).

On considère maintenant un fluide viscoélastique reposant sur le plan oscillant. A basse fréquence, ce fluide se comporte comme un fluide newtonien, et l'on a $\sigma = \eta \dot{\gamma}$; à haute fréquence, il se comporte comme un solide et $\eta \rightarrow 0$. On modélise cette dépendance en ω par une viscosité cinématique complexe (modèle de Maxwell) :

$$\nu(\omega) = \frac{\nu_0}{1 + i\omega/\omega_c},$$

où ν_0 est la viscosité cinématique à basse fréquence, et ω_c la fréquence de coupure entre les deux régimes.

1. Montrer qu'une telle viscosité cinématique complexe $\nu(\omega)$ modélise bien, à haute fréquence, le comportement d'un solide élastique

$$\sigma(t) = G(\omega)\gamma(t),$$

où $\gamma(t)$ est la déformation, et $G(\omega)$ le module d'élasticité complexe, que l'on déterminera en fonction de ν_0 et ω_c .

2. Montrer que le champ de vitesse prend maintenant la forme

$$v_x(y, t) = A\omega e^{-\beta y} \cos(\omega t - ky),$$

où l'on n'a plus nécessairement $\beta = k$ comme dans le cas newtonien. Montrer que ces deux paramètres sont liés par la relation

$$\beta k = \frac{\omega}{2\nu_0}.$$

3. En déduire la relation de dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2}{2\nu_0\omega_c} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \right).$$

Que vaut la profondeur de pénétration δ dans les cas haute et basse fréquence ? Calculer δ et la célérité $c = \omega/k$ de l'onde acoustique considérée précédemment, dans le cas d'un fluide de Maxwell avec pulsation de coupure $\omega_c = 0,3$ Hz.