MASTER 1 ET MAGISTÈRE 2 DE
PHYSIQUE FONDAMENTALE

Mécanique des fluides

EXAMEN DU JEUDI 2 NOVEMBRE 2017
(Durée : 3 heures - sans document)

Important : rendre les deux problèmes sur des copies séparées.
Reporter votre numéro d'anonymat sur chacune des deux copies.

Problème 1. Sustentation d'une feuille glissant sur une table

Si l'on fait glisser une feuille de papier à la surface d'une table lisse, on constate que celle-ci subit très peu de frottement : l'écoulement dans la fine couche d'air entre la table et la feuille légèrement inclinée induit une force verticale qui compense le poids de la feuille, évitant ainsi un contact solide. L'objectif de ce problème est de calculer cette force verticale.

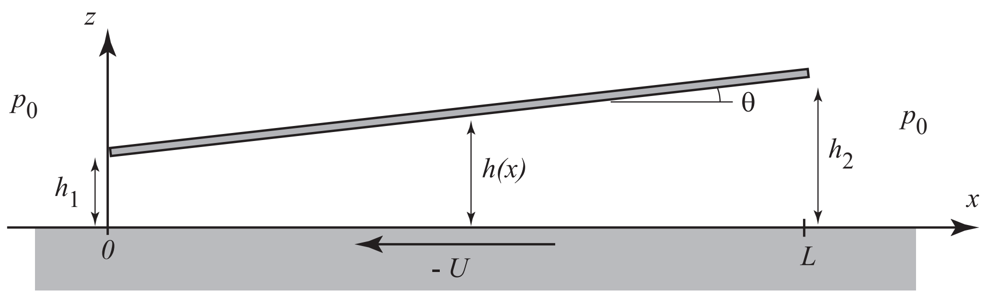

FIGURE 1 – Ecoulement dans une couche d'air comprise entre une feuille inclinée et une surface horizontale, dans le référentiel de la feuille.

On considère une feuille plane et rigide, de longueur $L = 30$ cm et de largeur $\ell = 20$ cm dans la direction y (perpendiculaire au plan du dessin), faisant un petit angle θ par rapport à l'horizontale. Cette feuille est en translation à vitesse constante $U = 1$ m/s, de gauche à droite, au dessus d'une surface horizontale fixe. La distance entre la feuille et la surface est décrite par

$$h(x) = h_1 + \theta x,$$

avec $h_1 = 0.1$ mm et $\theta \simeq \tan\theta = (h_2 - h_1)/L = 10^{-3}$.

Dans tout ce problème on va se placer dans le référentiel de la feuille (figure 1). Dans ce référentiel, la feuille est à vitesse nulle, tandis que la surface horizontale est en déplacement à vitesse $-U$, de droite à gauche. On ne prend en compte que l'écoulement d'air (densité $\rho = 1.2$ Kg m^{-3}, viscosité dynamique $\eta = 1.8 \cdot 10^{-5}$ Kg m^{-1} s^{-1}) entre la surface inférieure et la feuille ; en négligeant l'écoulement d'air à l'extérieur, on peut considérer que la pression en $x = 0$ et en $x = L$ est égale à la pression atmosphérique p_0. On ne considère pas l'effet de la gravité dans l'écoulement.

1. On cherche à déterminer la force verticale par unité de profondeur, F/ℓ, exercée par le fluide sur la feuille. En supposant que F/ℓ ne dépende que de η, U, θ, h_1 et h_2, en déduire par analyse dimensionnelle qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$\frac{F}{\ell} = \eta U \Phi(\theta, h_2/h_1). \tag{1}$$

2. Préciser les conditions aux limites pour la vitesse, et donner l'ordre de grandeur des composantes u_x et u_z de la vitesse.
3. Calculer le nombre de Reynolds dans ce problème, et vérifier qu'il satisfait les conditions d'application de l'approximation de lubrification.
4. Montrer que l'équation de Navier-Stokes s'écrit

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

5. Calculer la vitesse u_x en tout point de l'écoulement en fonction de $\partial p/\partial x$.
6. Calculer le débit volumique q par unité de profondeur (selon y) à travers une surface verticale (dans le plan y, z) située à une abscisse x quelconque. Pourquoi ce débit est-il indépendant de x ?
7. Justifier qu'il existe une abscisse x_m telle que $\partial p/\partial x = 0$. Dessiner l'allure du profil de vitesse $u_x(z)$ en $x < x_m$, en $x = x_m$ et en $x > x_m$.
8. En calculant le débit en x_m, en déduire que le gradient de pression s'écrit

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 6\eta U \left(\frac{h_m}{h^3(x)} - \frac{1}{h^2(x)} \right),$$

   où $h_m = h(x_m)$.
9. Afin de pouvoir intégrer cette équation différentielle, on la ré-écrit sous la forme $\partial p/\partial h = F(h)$. En déduire le profil de pression

$$p(x) = p_0 + \frac{6\eta U}{\theta} \left[\frac{h_m}{2} \left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h^2(x)} \right) - \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h(x)} \right) \right].$$

   En déduire l'expression de h_m en fonction de h_1 et h_2.
10. On souhaite calculer la composante verticale de la force exercée par le fluide sur la feuille. Montrer que cette force peut s'écrire

$$\frac{F}{\ell} = \frac{1}{\theta} \int_{h_1}^{h_2} (p(h) - p_0) dh.$$

   Calculer F/ℓ et l'exprimer sous la forme (1).
11. Sachant qu'une feuille de papier rigide A4 pèse environ 10 g, indiquez qualitativement quel sera son mouvement vertical dans ces conditions.
12. Question bonus : Calculer la composante horizontale de la force de frottement exercée par le fluide sur la surface inférieure.

(D'après "Hydrodynamique Physique", Guyon, Hulin, Petit, CNRS Editions)

Problème 2. Analyse d'une carte météorologique

Les grandes circulations atmosphériques sont dominées par l'effet de la rotation de la Terre ainsi que par la stratification en densité de l'air. Dans ce problème, on considère toutefois l'atmosphère comme isodensité pour simplifier, et l'on s'intéresse seulement à l'influence de la rotation de la Terre sur la structure des écoulements.

On admet que, dans un référentiel tournant de vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$, l'équation de Navier-Stokes pour un fluide isodensité s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p - 2\vec{\Omega}_\wedge \vec{u} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{u}, \qquad (2)$$

où $\vec{u}$ est la vitesse *relative* du fluide dans le référentiel tournant. Le terme supplémentaire $-2\vec{\Omega}_\wedge \vec{u}$ est la force de Coriolis (par unité de masse). La force centrifuge et la force de gravité n'apparaissent pas, car elles sont incluses dans le terme de pression modifiée p : elles n'interviennent donc pas dans la suite.

On considère un repère local Cartésien, tel que (x, y) est tangent à la surface de la Terre et z selon la verticale locale. Pour simplifier, nous allons nous restreindre à l'étude d'écoulements atmosphériques au voisinage du pôle Nord : on peut alors prendre $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$, avec $\Omega > 0$ et $\vec{e}_z$ l'axe de rotation de la Terre. On note L la taille caractéristique des structures de l'écoulement, U leur vitesse caractéristique, et $T = L/U$ le temps caractéristique d'évolution du champ de vitesse.

1. Déterminer les ordres de grandeur des termes inertiels, visqueux et de Coriolis de l'équation (2). Dans le cadre de l'*approximation géostrophique*, cette équation devient

$$\vec{\nabla} p = -2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{u}. \qquad (3)$$

   Exprimer, en fonction des nombres de Reynolds $Re = UL/\nu$ et de Rossby $Ro = U/2\Omega L$, les conditions sous lesquelles cette approximation est vérifiée. En déduire que le vecteur vitesse est alors dirigé le long des isobares.

2. Calculer la vitesse angulaire Ω de la Terre, et en déduire le nombre de Rossby dans le cas d'une dépression (10 m/s sur 400 km), d'une tornade (20 m/s sur 20 m) et de la vidange d'une baignoire. Qu'en déduisez-vous de l'influence de la rotation de la Terre sur ces 3 écoulements ?

3. Ecrire les projections de l'équation (3) selon les axes x, y, z. A partir du rotationnel de l'équation (3), en déduire que :

   (i) l'écoulement horizontal (u_x, u_y) satisfait une condition d'incompressibilité bi-dimensionnelle.

   (ii) le champ de vitesse $\vec{u}$ est invariant par translation selon z (ce résultat porte le nom de *théorème de Taylor-Proudman*).

4. En tenant compte des conditions aux limites en $z = 0$, en déduire que le champ de vitesse est horizontal en tout point.

5. A partir d'une évaluation du gradient de pression, estimez la vitesse du vent au voisinage de la grande zone dépressionnaire située sur l'Ecosse sur la carte de la figure 2 (au centre de la carte). On prendra $\rho = 0.6$ kg m^{-3} pour la densité moyenne de l'air en altitude. Que pensez-vous du nombre de Rossby dans cette région ?

6. Montrer que le Laplacien de la pression s'écrit

$$\nabla^2 p = 2\rho\Omega\omega_z, \qquad (4)$$

   où ω_z est la composante selon z de la vorticité.

7. On considère un grand tourbillon de symétrie circulaire : il s'agit par convention d'un *cyclone* s'il tourne dans le même sens que la Terre, et d'un *anticyclone* dans le cas contraire. En considérant que l'on a $\omega_z = cste$ près du centre du tourbillon (approximation de rotation solide), en déduire le

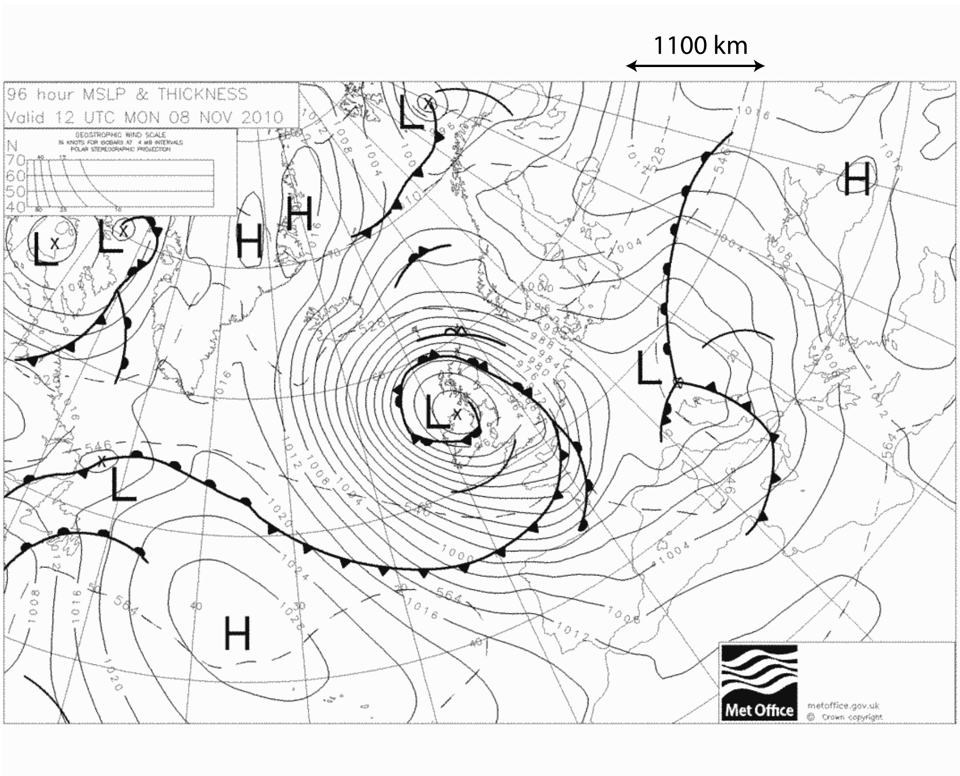

FIGURE 2 – Carte de pression sur l'Atlantique Nord. Les isobares sont espacées de 400 Pa (les pressions indiquées sur les isobares sont exprimées en hPa). Les centres de haute et basse pression sont notés H (*high*) et L (*low*). Les lignes marquées de triangles ou de demi-cercles représentent respectivement les fronts froids et chauds.

champ de pression $p(r)$ dans ce grand tourbillon, par intégration de l'équation (4) en coordonnées cylindriques (r, θ, z). Le Laplacien dans ces coordonnées est donné par

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}f\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}f + \frac{\partial^2}{\partial z^2}f.$$

8. En déduire que, dans l'hémisphère Nord, un cyclone est associé à une dépression, tandis qu'un anticyclone est associé à une surpression. Peut-on vérifier cette propriété sur la figure 2 ?
9. Les frottements avec la surface de la Terre font que l'équilibre géostrophique (3) n'est plus vérifié à basse altitude. Il existe une couche limite, d'épaisseur notée δ, telle que pour $z \gg \delta$ l'équation (3) reste valide, tandis que pour $z \ll \delta$ c'est le terme visqueux qui équilibre le gradient de pression.

   a) Si l'on considère l'écoulement comme strictement horizontal à toute altitude, montrer que la pression reste partout indépendante de z.

   b) On admettra qu'à basse altitude le vecteur vitesse est maintenant aligné avec le gradient de pression. Dans le cas d'un anticyclone (respectivement une dépression), déduire de la question 6 qu'il doit exister une vitesse radiale sortante (respectivement rentrante) près de la surface de la Terre.

   c) Montrer qu'il existe également alors une petite vitesse verticale dans le tourbillon, dont on déterminera l'ordre de grandeur. Commenter le signe de cette vitesse verticale.

10. Question Bonus : Il est bien connu que la présence d'un anticyclone favorise un temps sec, tandis qu'une dépression est souvent associée à un temps pluvieux. Pouvez-vous interpréter ces phénomènes ?